Lezione 1 Aprile

Esempi di isomorfismo.

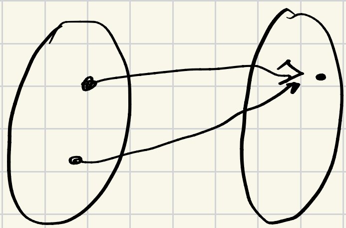
(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$.

Già visto che è lineare.

Non è iniettiva: ad esempio $(2,5)$, $(3,4)$ hanno la stessa immagine perché

$$(2,5) \xmapsto{f} 2+5=7$$
$$(3,4) \xmapsto{f} 3+4=7$$

e $(2,5) \neq (3,4)$, dunque f non è iniettiva



NO INIETTIVA!

Però è suriettiva: scelto $x \in \mathbb{R}$, chiaro che $(x,0)$ ha come immagine x:

$$(x,0) \xmapsto{f} x+0=x.$$

Non è isomorfismo, perché no iniettiva.

(3) La volta scorsa abbiamo notato che

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V = \left\{ k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}, \text{ con } k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(dove r_1, r_2 sol. di $ax^2 + bx + c$ e l'equadiff che consideriamo è $ay'' + by' + c = 0$, $b^2 - 4ac > 0$)

è un isomorfismo.
Rispetto alla volta scorsa, dimostro l'iniettività (che avevo lasciato per esercizio).
Supponiamo che $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ con la stessa immagine, cioè

$$a e^{r_1 x} + b e^{r_2 x} = c e^{r_1 x} + d e^{r_2 x}.$$

Da cui

$$(a-c) e^{r_1 x} = (d-b) e^{r_2 x}, \text{ cioè}$$

$$(a-c)e^{r_1 x} + (b-d)e^{r_2 x} = 0.$$

Ora, $e^{r_1 x}$ e $e^{r_2 x}$ sono generatori di V, anzi, ne sono una base.

Quindi, $\begin{cases} a-c=0 \Rightarrow a=c \\ b-d=0 \Rightarrow b=d. \end{cases}$

<u>Oss</u> Se $f: V \to W$ non è lineare, dove V e W sono due K-s.v. ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) allora non ha senso chiedersi se f è isomorfismo; ha però sempre senso chiedersi se è iniettiva o suriettiva.

(4) $f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[= \mathbb{R}_{>0} = V$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

V

s.v. con

$\Longrightarrow \quad a \underset{V}{+} b = a \cdot b$

$\lambda \underset{V}{\cdot} a = a^{\lambda}$

$$x \xmapsto{f} e^{x}.$$

Cioè $f(x) = e^x$.

Iniettiva: Se $a, b \in \mathbb{R}$ (dominio di f) tali che $e^a = e^b$, allora

$$\ln(e^a) = \ln(e^b)$$

$$a \ln(e) = b \ln(e)$$

$$a = b.$$

Suriettiva: Ci chiediamo se è vero che per ogni $y \in V$, cioè per ogni $y \in \mathbb{R}_{>0}$, esiste un $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$e^x = y$$

Se pongo $x = \ln(y)$ (posso farlo perché $y > 0$), allora ho

$$e^{\ln(y)} = y$$

e dunque f è suriettiva.

Dunque f è isomorfismo.

Oss lo 0_V di V nell'esempio precedente è il numero reale $1 \in V$.

Lemma Proprietà delle funzioni lineari.
Siano V e W due K-s.v. (spazi vettoriali su $K=\mathbb{R}$, $K=\mathbb{C}$). Se $V \to W$ è lineare:

(1) $f(0_V) = 0_W$.

(2) Per ogni $v \in V$, $f(-v) = -f(v)$.

(3) Se f è isomorfismo, allora $f^{-1}: W \to V$ è lineare, e dunque un isomorfismo.

(4) Se f è un isomorfismo, e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V, allora $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base di W.

Dim. (1) $0_V = 0_V + 0_V$.

Spezza le somme
(a): $f(v+w) = f(v) + f(w)$

$$f(0_V) = f(0_V + 0_V)$$
$$\stackrel{\uparrow}{=} f(0_V) + f(0_V) \text{ (lineare)}$$

$$\overset{!}{=} 2f(0_V)$$

$$\Rightarrow f(0_V) = 2f(0_V)$$

$$\Rightarrow f(0_V) = 0_W.$$

(2) Sia $v \in V$. Voglio mostrare che

$$f(-v) = -f(v).$$

Si può fare in vari modi; quello più semplice è

$$f(-v) = f((-1)\cdot v) = -f(v)$$

f è lineare (b) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Oppure:

$$0_V = v + (-v).$$

$\Rightarrow f(0_V) = 0_W$ (da (1) già dimostrato)

perciò

$$f(v + (-v)) = 0_W$$

$$f(v) + f(-v) = 0_W \quad \text{(linearità)}$$

cioè

$f(v) = -f(-v)$.

(3) Mostra che se f è isomorfismo, allora anche f^{-1} lo è:

$$f: V \to W$$
$$f^{-1}: W \to V$$

$f^{-1}(w) = v$ se $f(v) = w$

(questo v esiste ed è unico perché f è iniettiva e suriettiva).
è unico. dice che esiste

Per mostrare che f^{-1} è lineare devo mostrare che

(a) $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$

(b) $f^{-1}(\lambda w) = \lambda f^{-1}(w)$.

Mostro (a):

Sia $v_1 = f^{-1}(w_1) \iff w_1 = f(v_1)$

$v_2 = f^{-1}(w_2) \iff w_2 = f(v_2)$

Se ora $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$ allora ho che

$$f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) \overset{L}{=} w_1 + w_2$$

cioè

$$f^{-1}(w_1+w_2) = v_1 + v_2$$

Allora ho

$$f^{-1}(w_1+w_2) = v_1+v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$$

Dunque, (a) è ok.

Verifico (b):

Sia $v = f^{-1}(w) \iff f(v) = w$.

Allora

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \cdot w$$

perciò

$$f^{-1}(\lambda w) = \lambda v = \lambda f^{-1}(w).$$

dunque anche (b) è verificata.

Perciò, f^{-1} è lineare. Poiché è sia

$\underbrace{\text{iniettiva che suriettiva}}$, è un isomorfismo

Ovvio: se f è iniettiva & suriettiva anche f^{-1} lo è!!