

Lezione 30/3.

Scopo: Studiare funzioni tra spazi vettoriali che rispettino (in un senso da chiarire) la struttura di s.v. (= spazio vettoriale).

Def siano U e V due spazi vettoriali su K ($K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$).

Una funzione

$$f: U \rightarrow V$$

è detta lineare se: (linearità rispetto alla somma)

(a) per ogni $u_1, u_2 \in U$, si ha

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$

somma di
due vettori
di U

somma di due
vettori di V .

(b) per ogni $u \in U$ e per ogni $\lambda \in K$,
si ha (linearità rispetto al prodotto)

$$f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$$

prodotto di
uno scalare per
un vettore in U

prodotto di uno scalare
per un vettore di V .

Def. Dico che una funzione lineare
che è anche biettiva (iniettiva &
suriettiva) è un isomorfismo di
spazi vettoriali, e che U e V sono
isomorfi se esiste un isomorfismo
 $\varphi: U \rightarrow V$.

Oss. Al posto di richiedere sia (a)
che (b), possiamo richiedere una
sola formula, più complicata:

$$(c) \quad \forall u_1, u_2 \in U, \quad \forall \lambda, \mu \in K, \\ f(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda f(u_1) + \mu f(u_2)$$

Esercizio (facile, ma istruttivo!)

Mostrare che

(a) + (b) è equivalente a (c)

cioè

$$(a) + (b) \implies (c)$$

$$(c) \implies (a) + (b).$$

Esempi

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$.

f è lineare?

Verifichiamo che valgono le (a) e le (b)

Verifichiamo la (a)

Fissiamo $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. Calcoliamo:

$$(*) f(u_1 + u_2) = 2(u_1 + u_2)$$

(se chiamiamo $u_1 = x$ e $u_2 = y$, questo è
 $f(x+y) = 2(x+y)$).

$$(**) f(u_1) + f(u_2) = 2u_1 + 2u_2$$

(oppure $f(x) + f(y) = 2x + 2y$).

Verificare (a) a priori. Verificare
che queste due espressioni coincidono,
cioè verificare che

$$Z(u_1 + u_2) = Z u_1 + Z u_2$$

e questo è vero, per ogni u_1, u_2 .

$$(Z(x+y) = Zx + Zy).$$

Verifico (a) (b).

Fisso $u = x \in \mathbb{R}$. Fisso $\lambda \in \mathbb{R}$.

Voglio verificare

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

$$\begin{array}{ccc} & // & // \\ Z(\lambda x) & & \lambda \cdot (Zx) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z\lambda x & \equiv & \lambda \cdot Zx \end{array}$$

Verificato che via (a) che (b) funziona.
 $f: x \rightarrow Zx$ è lineare.

Esempio 2

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x + y.$$

Verifichiamo (a)

Fisso $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ in \mathbb{R}^2 . Calcolo

$$f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \text{ e}$$

$$f((x_1, y_1)) + f((x_2, y_2))$$

e li confronto.

$$\begin{aligned} (\circ) \quad f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) \\ &= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \end{aligned}$$

$$(\circ) \quad f((x_1, y_1)) + f((x_2, y_2)) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$$

Ma la somma in \mathbb{R} è commutativa,
dunque

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$$

dunque (a) è verificata.

Verifichiamo (b). Fisso $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$
calcolo:

$$f(\lambda(x, y)) = f((\lambda x, \lambda y)) = \lambda x + \lambda y$$

$$\lambda f(x, y) = \lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y$$

Le due espressioni sono uguali, quindi anche (b) è verificata.

Perciò f è lineare.

Es. 3 Considero ora $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita con $f(x, y) = x \cdot y$.

Mostro che f non è lineare.

Mostro ad esempio che (a) non è verificata. La (a) mi dice che le due espressioni seguenti devono essere uguali:

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

$$f((x_1, y_1)) + f((x_2, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Mi chiedo se è vero che queste due espressioni sono uguali, per ogni scelta di $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Cioè: se tu trovi una scelta di $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ per cui le due espressioni sono diverse, la (a) è falsa, e quindi f non è lineare.

Voglio quindi verificare se

$$x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

per ogni scelta di $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Cioè

$$\cancel{x_1 y_1} + x_2 y_1 + x_1 y_2 + \cancel{x_2 y_2} = \cancel{x_1 y_1} + \cancel{x_2 y_2}$$

$$x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0,$$

per ogni scelta, che è FALSO. Ad

Esempio

$$(x_1, y_1) = (2, -1), \quad (x_2, y_2) = (1, 1).$$

Abbiamo

$$x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2 = 2$$

$$2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 =$$

$$n_1 y_1 + n_2 y_2 = 1$$

$$2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 1$$

sono diverse!
non è lineare.

Esempio 4

Sia V lo spazio vettoriale delle sol.
dell'equa diff

$$a y'' + b y' + c y = 0,$$

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Sono quindi

$$V = \left\{ k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

dove r_1, r_2 sono le soluzioni dell'
equazione $a x^2 + b x + c = 0$.

Considero la funzione

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$$

definita da

$$f(\underbrace{(a, b)}_{\in \mathbb{R}^2}) = a e^{r_1 x} + b e^{r_2 x}.$$

Mostro che questa funzione è lineare:

$$\begin{aligned} f((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) &= f((a_1 + a_2, b_1 + b_2)) = \\ &= (a_1 + a_2) e^{r_1 x} + (b_1 + b_2) e^{r_2 x} = \\ &= a_1 e^{r_1 x} + a_2 e^{r_1 x} + b_1 e^{r_2 x} + b_2 e^{r_2 x} = \\ &= (a_1 e^{r_1 x} + b_1 e^{r_2 x}) + (a_2 e^{r_1 x} + b_2 e^{r_2 x}) = \\ &= \boxed{f((a_1, b_1)) + f((a_2, b_2))} \end{aligned}$$

Sono uguali! \Rightarrow (a) è ok.
(la prima e ultima
formula)

Verifica b2 (b)

$$\boxed{f(\lambda(a, b))} = f((\lambda a, \lambda b)) \\ = (\lambda a) \cdot e^{r_1 x} + (\lambda b) \cdot e^{r_2 x}$$

$$! \lambda (ae^{r_1 x} + be^{r_2 x})$$

$$! \lambda \cdot f(a, b)$$

La prima e ultime parole sono uguali, quindi (b) è dr.

Posiamo anche notare che l'operatore f non è solo lineare, ma è anche invertibile e suriettivo, ovvero è un isomorfismo.

Invertibile: Suppongo che $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ abbiano la stessa immagine in V ,

cioè come funzione, si abbia

$$a_1 e^{r_1 x} + b_1 e^{r_2 x} = a_2 e^{r_1 x} + b_2 e^{r_2 x}$$

allora

$$(a_1 - a_2) e^{r_1 x} + (b_1 - b_2) e^{r_2 x} = 0.$$

da cui (verificate!) $a_1 - a_2 = 0$ e $b_1 - b_2 = 0$

$$a_1 - a_2 = 0 \quad e \quad b_1 - b_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$$

$$\Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2). \Rightarrow \text{invertevole.}$$

Struttura: Ovvero

Scelto $(u_1 e^{r_1 x} + u_2 e^{r_2 x})$, chiaro
che

$$f((u_1, u_2)) = u_1 e^{r_1 x} + u_2 e^{r_2 x}.$$

Esempio 5

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x$$

Non è lineare.

Verificare se vale la (2).

$$f(x+y) = e^{(x+y)} = e^x \cdot e^y$$

$$f(x) + f(y) = e^x + e^y.$$

Chiaro che $e^x \cdot e^y \neq e^x + e^y$ per qualche

scelta di x, y : ad esempio per $x=y=0$,

abbiamo

$$e^0 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2.$$

$1 \neq 2 \Rightarrow$ non è lineare.

Oss. Per mostrare che $f: U \rightarrow V$ non è lineare, basta trovare due vettori u_1, u_2 di U tali che

$$f(u_1 + u_2) \neq f(u_1) + f(u_2)$$

oppure trovare $u \in U, \lambda \in K$ tali che

$$f(\lambda u) \neq \lambda f(u)$$

Esempio 6 Sia V lo spazio vettoriale

$$]0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

con le operazioni:

$$x \underset{V}{+} y = x \cdot y, \text{ per } x, y \in V$$

$$\lambda \underset{V}{\cdot} x = x^\lambda, \text{ per } x \in V, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definisco $f: \mathbb{R} \rightarrow V$

$$f(x) = e^x.$$

(Esercizio: Verificare che V è s.v. con $\underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot}$)

Mostrare che f è lineare:

Verifica (a)

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

↓ devo verificare

Somma in \mathbb{R} Somma in V

Verifica facendo i calcoli:

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Perché in V
ho definito

$$x + y = x \cdot y$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & e^x + e^y \\ & \downarrow \\ & = f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Verifica la (b) ↓ devo verificare questo.

$$f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$$

Verifica facendo i calcoli:

$$f(\lambda x) = e^{\lambda x} = (e^x)^\lambda$$

Perché in V

$$\lambda \cdot x = x^\lambda$$

(Usalo per e^x al posto di x !)

$$\downarrow = \lambda \cdot (e^x) = \lambda \cdot f(x)$$

Anche la (b) è vera $\Rightarrow f$ è l'iana.

In questo caso, $f(x) = e^x$ è
iniettiva; se infatti

$$e^x = e^y \Rightarrow e^{x-y} = 1 \Rightarrow x = y.$$

Esempi di isomorfismi

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ è isomorfismo.

Già abbiamo verificato che è l'iana.

Ci chiediamo se è iniettiva e suriettiva:

Iniettiva: se prendo $x, y \in \mathbb{R}$ e suppongo
che $f(x) = f(y)$, devo concludere che
 $x = y$ per poter dire che f è iniettiva.

(Ricordo: $f: A \rightarrow B$ iniettiva se:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

ovvero

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).)$$

Nel nostro caso: per x, y , ho che

$$2x = 2y \Rightarrow x = y.$$

$\Rightarrow f$ è suriettiva.

Suriettività

(Ricorda: $f: A \rightarrow B$ suriettiva se $\forall b \in B$, esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$).

Nel nostro caso, fissa $y \in \mathbb{R}$ e chiediamoci se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $2x = y$. Certo che esiste, basta prendere $x = \frac{y}{2}$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{y}{2}\right) \mapsto 2 \cdot \frac{y}{2} = y.$$