Prof. Jorge Vitória
Università degli Studi di Padova, 2025/2026

Esercizi per il corso di MATEMATICA

Corsi di laurea in Chimica e Chimica Industriale

Foglio 9

25 marzo 2026

Gli esercizi segnati con asterisco sono estratti/adattati dal libro di F. Bottacin, *Algebra Lineare e Geometria*, Società Editrice Esculapio (2021)

1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano U e W sottospazi arbitrari di V. Le seguenti affermazioni sono vere o false? Si giustifichi la risposta - dimostrando la affermazione se vera, o trovando un controesempio se falsa.

   (a) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W)$ è minore o uguale al minimo fra $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.

   (b) $\dim_{\mathbb{R}}(U + W)$ è minore o uguale al massimo fra $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ e $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.

   (c) Se $\dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) > \dim_{\mathbb{R}}(V)$, allora esiste un vettore $v \neq 0_V$ appartenente all'intersezione $U \cap W$.

   (d) Se $U \cap W = \{0\}$ allora si ha che $U + W = V$.

   (e) $U + V = V$ e $W + V = V$.

2. * Per ogni t in $\mathbb{R}$ si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

   $$U_t = \langle (1,t,2t,0), (t,t,t,t) \rangle \quad V_t = \langle (t-2,-t,-3t,t), (2,t,2t,0) \rangle$$

   (a) Si consideri $t = 1$. Si determinino basi per U_1, V_1, $U_1 \cap V_1$ e $U_1 + V_1$.

   (b) Per ogni base trovata nella parte (a), si trovino vettori in modo a complettarle a basi di $\mathbb{R}^4$.

   (c) Si determini se esiste t in $\mathbb{R}$ tale che $U_t + V_t = \mathbb{R}^4$.

   (d) Per quali t si ha che $\dim_{\mathbb{R}}(U_t \cap V_t) = 1$?

3. Per ognuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ (si veda Esercizio 5 del Foglio 7) si trovi un complemento in $\mathbb{R}^4$.

   (a) $U = \langle (1,2,3,4), (2,2,2,6), (0,2,4,4) \rangle$

   (b) $V = \langle (1,-1,1,-1), (2,0,0,2) \rangle$

   (c) $W = \langle (0,0,1,1), (-1,0,2,3), (1,0,1,0) \rangle$

   (d) $R = \langle (1,2,3,4), (-1,1,1,-1), (0,3,4,3) \rangle$

4. Sia W il sottospazio di soluzioni in $\mathbb{R}^4$ del sistema di equazioni

   $$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + t - y = 0 \end{cases} .$$

   Dall'altra parte, si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$: $V = \langle (1,1,1,1), (0,1,0,3) \rangle$

   (a) Si determini una base di $V \cap W$. Gli sottospazi V e W sono in somma diretta?

   (b) Si determini una base di $V + W$.

   (c) Si trovi un complemento di $V \cap W$ in V.

   (d) Si trovi un complemento di $V \cap W$ in W.

   (e) Si trovi un complemento di $V \cap W$ in $\mathbb{R}^4$.

   (f) Si trovi un complemento di V in $V + W$.

(g) Si trovi un complemento di W in $V+W$.

(h) Si trovi un complemento di $V+W$ in $\mathbb{R}^4$.

5. Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$ (si veda esercizio 1, foglio 5).

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1&4&0\\0&2&0&-2&0\\0&0&3&0&3\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&0&1\\-4&0&-2\\0&3&2\\2&-2&3\\4&3&4\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&2\\2&0&2\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&-1&-2&-1&1\\-2&1&2&2&4\\-3&3&6&3&0\\1&-\frac{1}{2}&-1&-1&-2\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}0&-1&1&5\\1&0&1&2\\2&2&0&5\\3&2&1&0\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}1&-1&3&1\\2&2&0&0\\2&0&1&0\\3&2&0&0\\3&0&0&1\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

(a) Si determinino basi per tutti sottospazi generati dalle righe di queste matrici.

(b) Si determini il rango di ogni matrice in questa lista.

(c) Supponiamo che ogni delle matrici in questa lista sono matrici complete di certi sistemi di equazioni (cioè, si pensi che ogni matrice rappresentata abbia una sbarra di separazione fra l'ultima colonna e il resto della matrice). Per tali sistemi di equazioni, si usi il teorema di Rouchè-Capelli per determinare quali hanno soluzione unica, quali sono impossibili e quali hanno infinite soluzioni (in tale caso si indichi il numero di variabili libere).

6. Sia t un parametro reale e si consideri la matrice

$$A_t=\begin{pmatrix}1&t&-1&t\\2&2t&-1&3t+1\\1&-1&-t&2\end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli il rango di A_t per $t=-1$.

(b) Si calcoli il rango di A_t per ogni valore di t.

(c) Supponiamo che la matrice A_t è la matrice completa di un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{R}$. Per quali valori di t il sistema avrà soluzioni?

(d) Per i valori di t per cui il sistema di equazioni considerato in (c) ha soluzioni, si trovino tutte tali soluzioni.

7. Per ogni parametri t e k in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_{t,k}:=\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\3&5&-4&16\\2&3&-k&t\end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli il rango di $A_{t,k}$ per ogni valore di t e di k.

(b) Supponiamo che $A_{t,k}$ è la matrice completa di un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{R}$.

i. Per quali valori di t e di k il sistema avrà soluzioni?

ii. Per quali valori di t e di k il sistema avrà un'unica soluzione?

iii. Per quali valori di t e di k il sistema avrà infinite soluzioni? In tali casi, quante variabile libere ci sono?

8. * Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, il rango della matrice

$$\begin{pmatrix}0&1&2&1&0\\1&2&2&1&1\\1&1&a&0&1\\0&a&2a&a^2&0\end{pmatrix}$$