25/03/2026

Proposizione 1.30: Sia A una matrice $m \times n$ su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) e sia U una sua forma ridotta.
Allora $\operatorname{rk} U = \dim_{\mathbb{k}} \langle \text{righe di } A \rangle$

dove $\langle \text{righe di } A \rangle \subseteq \mathbb{k}^n$.

Dimostrazione: (Continuazione)

Abbiamo già visto che:

- Se A è in forma ridotta, allora

$$\begin{array}{c}\text{n° righe}\\ \text{non-nulle}\end{array} = \operatorname{rk} A = \dim \langle \text{righe di } A \rangle$$

- Per ogni operazione elementare

$$A \longrightarrow A'$$

abbiamo $\langle \text{righe } A \rangle = \langle \text{righe } A' \rangle$

Adesso, posso allora concludere che

$$\langle \text{righe di } A \rangle = \langle \text{righe di } U \rangle$$

poichè U è ottenuta da A tramite una sequenza di operazioni elementari.

$$\dim \langle \text{righe di } A \rangle = \dim \langle \text{righe di } U \rangle = \operatorname{rk} U$$

dalla prima parte della dimostrazione. $\blacksquare$

Definizione 1.31 Per una matrice A $m \times n$ su k (dove $k=\mathbb{R}$ o $k=\mathbb{C}$) definiamo il rango di A come la dimensione del sottospazio di k^n generato dalle righe di A.

Di solito scriviamo $R(A)$ per questo sottospazio.

Allora la nostra definizione è

$$\operatorname{rk} A = \dim_k R(A)$$

Esempio: In $\mathbb{R}^4$ si calcoli la dimensione del sottospazio

$$W = \langle (1,2,1,0), (0,2,1,1), (1,4,2,1), (-1,0,0,1) \rangle$$

Sappiamo allora che la dimensione cercata è il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

poichè $W = R(A)$

Eliminazione Gaussiana

$$A \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ R_4 \to R_4 - 2R_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$\dim R(A) = \dim R(U) = 2$$

Si ha allora che

$$W = R(A) = R(U) = \langle (1,2,1,0), (0,1,1/2,1/2) \rangle$$

$\longrightarrow$ $\{(1,2,1,0), (0,1,1/2,1/2)\}$ è una base di W.

<u>Osservazione</u> Per trovare una base di un sottospazio di $\mathbb{k}^n$ generato da un insieme di vettori, possiamo pensare ad essi vettori come righe di una matrice; la base può essere allora trovata prendendo le righe non-nulle di una sua forma ridotta.

Ricordiamo il teorema di Rouché – Cappelli nella sua prima versione.

$$\underbrace{(A|b)}_{\substack{\text{matrice completa}\\ \text{di un sistema}\\ \text{di equazioni}}} \xrightarrow[\text{Gaussiana}]{\text{eliminazione}} \underbrace{(U|c)}_{\substack{\text{forma ridotta}\\ \text{di } (A|b)}}$$

- Se $\operatorname{rk} U \neq \operatorname{rk}(U|c) \longrightarrow$ c è dominante, e allora il sistema non ha soluzioni
- Se $\operatorname{rk} U = \operatorname{rk}(U|c)$
  - $\to$ se U ha colonne libere, allora ci sono ∞ soluzioni
  - $\to$ se tutte le colonne di U sono dominanti, allora c'è un'unica soluzione.

<u>Teorema di Rouché-Cappelli</u> (Seconda versione)

Sia $(A|b)$ la matrice completa di un sistema di m equazioni a n incognite (e quindi A è una matrice $m \times n$).

Allora il sistema ha soluzioni se e solo se

$$\operatorname{rk}(A|b) = \operatorname{rk} A$$

Inoltre, se ci sono soluzioni, abbiamo che

- ci sono infinite soluzioni se e solo se $rk(A|b) = rk A < n$
- c'è una unica soluzione se e solo se $rk(A|b) = rk A = n$.

Questa formulazione traduce la prima versione del teorema usando il concetto di rango di una matrice.

Osservazione: Se A è una matrice $m \times n$, $rk A \leq \min\{m, n\}$ poiché in forma ridotta, il rango di A corrisponde al numero di colonne dominanti $(\leq n)$ e al numero di righe non nulle $(\leq m)$.

Osservazione Se le righe di una matrice $A^{m \times n}$ sono l.i., cosa posso dire sul sistema di equazioni $(A|b)$?

$rk(A) = \dim R(A) = m$

$rk(A|b) = m$ poiché b non può avere un pivot! Allora $rk(A) = rk(A|b)$ e il sistema ha soluzioni.