24/03/2026

Proposizione 1.29: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$) e sia U un suo sottospazio. Allora esiste un complemento per U in V, cioè un sottospazio W di V tale che

$$U \cap W = \{0_V\} \quad (U \text{ e } W \text{ sono in somma diretta})$$
$$\text{e} \quad U + W = V.$$

Dimostrazione: Supponiamo che U ha dimensione k, con $k \leq n$. Sia $B = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ una base di U. Come conseguenza del Teorema dello scambio, esiste una base di V che contiene B; diciamo che questa base è

$$B' = \{\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{B}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{n-k \text{ vettori}}\}$$

Prendiamo come candidato a complemento di U in V il sottospazio $W = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$. Dobbiamo verificare che $U \cap W = \{0_V\}$ e che $U + W = V$.

- $U + W = V$: Dobbiamo verificare che ogni vettore v in V è una somma di un vettore in U con un vettore in W. Siccome v è una combinazione lineare degli elementi nella base B', abbiamo che

$$v = \underbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k}_{\text{appartiene a } U} + \underbrace{\beta_{k+1} v_{k+1} + \beta_{k+2} v_{k+2} + \dots + \beta_n v_n}_{\text{appartiene a } W}$$

allora $v \in U + W$.

- $U \cap W = \{0_V\}$. Prendiamo un vettore $v \in U \cap W$. Vorrei dimostrare che $v = 0_V$. Siccome $v \in U \cap W$, allora

$v \in U$ e $v \in W$ $\to v = \beta_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n$

$\to$ allora $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k$

$$0_V = v - v = (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k) - (\beta_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0_V = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k - \beta_{k+1} v_{k+1} - \cdots - \beta_n v_n$$

Allora, siccome B' è una base, i vettori $u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ sono l.i. e quindi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$
e $\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \cdots = \beta_n = 0$

Allora $v = 0 u_1 + \cdots + 0 u_k = 0_V$. ▨

Osservazione: La dimostrazione ci da un'algoritmo per trovare una base di un complemento di U in V:

1. Trovare base di U
2. Trovare base di V che contenga la base del punto 1.
3. W sarà il sottospazio generato dai vettori che aggiungo nel passo 2.

Si osservi anche che i vettori aggiunti nel passo 2, siccome fanno parte di una base di V, sono già l.i. fra di loro e quindi questi vettori costituiscono una base di W.

Attenzione: Siccome questo algoritmo coinvolge delle scelte, il complemento ottenuto non è unico!

Esempio Sia $V = \mathbb{R}^3$ e U il sottospazio delle soluzioni dell'equazione $y = 2x + 4z$. Si trovi un complemento di questo sottospazio.

(Se volessimo portare questa equazione in matrice completa:

$$(-2 \quad 1 \quad -4 \mid 0) \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{-2}]{} (\underbrace{1}_{x \text{ dominante}} \quad \underbrace{-\tfrac{1}{2} \quad 2}_{y \text{ e } z \text{ libere}} \mid 0) \;)$$

↳ però direi che abbiamo già nell'equazione data l'espressione di una variabile, y, rispetto a due libere x e z.

i vettori soluzioni di $y = 2x + 4z$ sono della forma

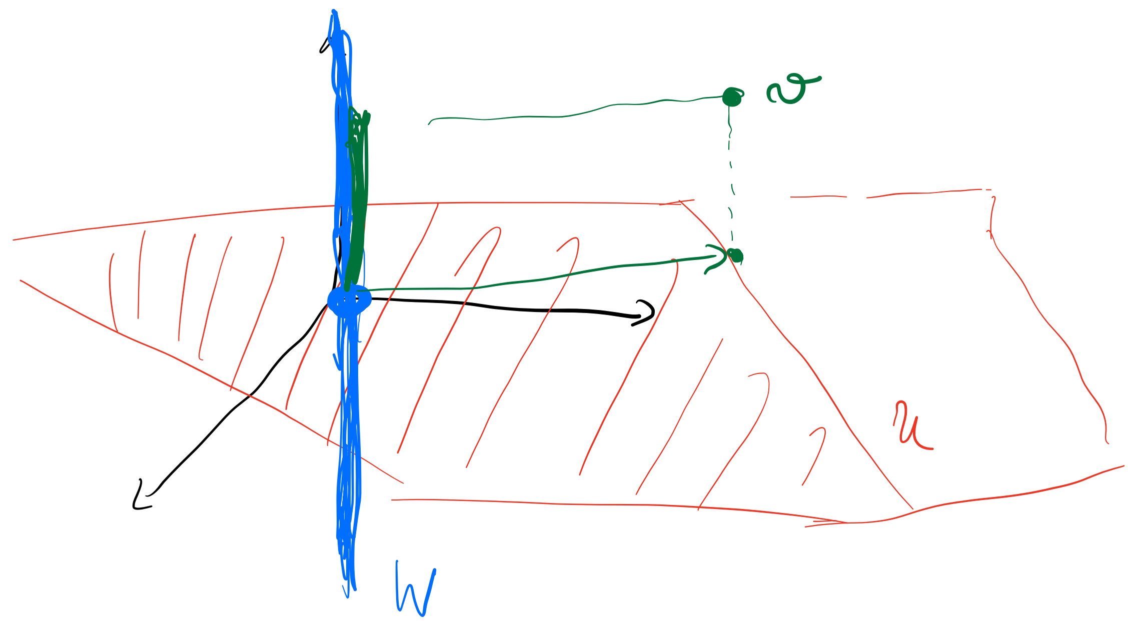
$$(x, 2x+4z, z) = x\underbrace{(1,2,0)}_{\substack{\text{vettore ottenuto}\\ \text{mettendo } x=1 \text{ e } z=0}} + z\underbrace{(0,4,1)}_{\substack{\text{vettore ottenuto}\\ \text{mettendo } x=0\\ \text{e } z=1}}$$

Abbiamo allora che $\mathcal{U} = \langle (1,2,0), (0,4,1) \rangle$ e siccome $(1,2,0)$ e $(0,4,1)$ non sono multipli uno dall'altro, abbiamo che $\mathcal{B} = \{(1,2,0), (0,4,1)\}$ è una base di $\mathcal{U}$.

Andiamo adesso a completare $\mathcal{B}$ ad una base di $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$. Quindi aggiungendo un vettore (per esempio $(0,0,1)$) che non appartiene a $\mathcal{U}$ (ovvero che non soddisfa l'equazione $y = 2x + 4z$), otteniamo una base di $\mathbb{R}^3$, per esempio

$$\{(1,2,0), (0,4,1), (0,0,1)\}$$

Adesso prendiamo $W = \langle (0,0,1) \rangle$ e allora $\{(0,0,1)\}$ è una base per un complemento di $\mathcal{U}$ in $\mathbb{R}^3$.



Torniamo al rango...

Ricordiamo che da una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, tramite eliminazione Gaussiana arriviamo ad una matrice U in forma ridotta. Il rango di U è il numero di righe non nulle di U, ovvero il numero di pivot.

Domanda: il rango della matrice ridotta dipende dal processo di eliminazione Gaussiana, oppure è indipendente di tal processo? Cioè il rango dipende soltanto dalla matrice iniziale A?

Proposizione 1.30: Sia A una matrice $m \times n$ su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) e sia U una sua forma ridotta. Allora

$$\operatorname{rk} U = \dim_{\mathbb{k}} \langle \text{righe di } A \rangle$$

dove $\langle \text{righe di } A \rangle \subseteq \mathbb{k}^n$.

Dimostrazione: Siano $R_1, R_2, \dots, R_m$ le righe di A, e vediamole come vettori in $\mathbb{k}^n$.

Primo caso: Supponiamo che A è già ridotta. Vogliamo vedere che il numero di righe non-nulle della matrice A è precisamente la dimensione dello spazio generato dalle righe. Dimostreremo allora che i vettori non-nulli in una matrice ridotta sono indipendenti.

Supponiamo che $\mathrm{rk}\, A = r$ ovvero

$$\underbrace{R_1, \dots, R_r}_{\neq 0}, \underbrace{R_{r+1}, \dots, R_m}_{=0}$$

Vediamo che $R_1, \dots, R_r$ sono l.i.

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_r R_r = 0$$

Sia j_1 la colonna del pivot di R_1. Allora la j_1-esima coordinata di $R_2, \dots, R_r$ è nulla.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rk}\, A = 2$

Sottospazio generato dalle righe

$$\langle (1,2), (0,1), (0,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2.$$
$$\| $$
$$\langle \underbrace{(1,2), (0,1)}_{\text{indipendenti}} \rangle$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{rk}\, B = 3$

$$\langle \underbrace{(1,2,0), (0,1,-1), (0,0,1)}_{\text{indipendenti}} \rangle$$

$$\begin{array}{c|ccccc} R_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \\ & \vdots & & \vdots & 0 & 1 \\ & \vdots & & \vdots & 0 & 0\,\cancel{*} \\ R_r & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & j_1 & j_2 \end{array}$$

Quindi nella j_1-esima equazione corrispondente alla j_1-esima coordinata di $\alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_r R_r = 0$, abbiamo

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_r \cdot 0 = 0 \longrightarrow \alpha_1 = 0$$

Allora $\alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_r R_r = 0$

Adesso guardo la colonna j_2 del pivot di R_2. L'equazione corrispondente sarebbe

$$\underbrace{\alpha_1}_{=0} \cdot a_{1 j_2} + \underbrace{\alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \dots + \alpha_r \cdot 0 = 0}_{\alpha_2 = 0}$$

Procedendo così, si fa vedere allora che tutti gli α_i sono uguali a zero e allora $R_1, \dots, R_r$ sono l.i.

Allora $\dim \langle R_1, \dots, R_r, R_{r+1}, \dots, R_m \rangle = r$

Caso generale: Dimostreremo che il sottospazio generato dalle righe di A non cambia facendo eliminazione Gaussiana. Per questo basta vedere che

$$\langle R_1, \dots, R_m \rangle = \langle R_1', \dots, R_m' \rangle$$

quando la matrice $\begin{pmatrix} R_1' \\ \vdots \\ R_m' \end{pmatrix}$ è ottenuta da $\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$

tramite una operazione elementare.

I) Scambio di righe: $R_i \longleftrightarrow R_j$

$$\langle R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_j, \dots, R_m \rangle =$$

$$= \langle R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_i, \dots, R_m \rangle$$

poichè gli vettori sono gli stessi!

II) Riscalamento di una riga. $R_i \rightsquigarrow \alpha R_i$, $\alpha \neq 0$

$$\underbrace{\langle R_1, \dots, R_i, \dots, R_m \rangle}_{V_1} \overset{?}{=} \underbrace{\langle R_1, \dots, \alpha R_i, \dots, R_m \rangle}_{V_2}$$

Supponiamo che $v \in V_1$.

$$v = \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 + \dots + \beta_i R_i + \dots + \beta_m R_m$$

$$v = \underbrace{\beta_1} R_1 + \underbrace{\beta_2} R_2 + \dots + \underbrace{\frac{\beta_i}{\alpha}} (\alpha R_i) + \dots + \underbrace{\beta_m} R_m$$

allora $v \in V_2$.

Sia adesso $w \in V_2$

$$w = \gamma_1 R_1 + \gamma_2 R_2 + \dots + \gamma_i (\alpha R_i) + \dots + \gamma_m R_m$$

$$w = \underbrace{\gamma_1}R_1 + \underbrace{\gamma_2}R_2 + \cdots + \underbrace{\gamma_i\alpha}R_i + \cdots + \underbrace{\gamma_m}R_m$$

e quindi $w \in V_1$.

Allora $V_1 = V_2$.

(III) Sostituzione di una riga per se stessa sommata al riscalamento di un'altra.

$$R_i \longrightarrow R_i + \alpha R_j$$

$$\underbrace{\langle R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_m \rangle}_{V_1} \overset{?}{=} \underbrace{\langle R_1, \ldots, R_i + \alpha R_j, \ldots, R_m \rangle}_{V_2}$$

Sia v un vettore in V_1

$$v = \beta_1 R_1 + \cdots + \beta_i R_i + \cdots + \beta_j R_j + \cdots + \beta_m R_m$$

$$v = \underbrace{\gamma_1}R_1 + \cdots + \underbrace{\gamma_i}(R_i + \alpha R_j) + \cdots + \underbrace{\gamma_j}R_j + \cdots + \underbrace{\gamma_m}R_m$$

$$= \underbrace{\gamma_1}_{\beta_1} R_1 + \cdots + \underbrace{\gamma_i}_{\beta_i} R_i + \cdots + \underbrace{(\gamma_j + \alpha\gamma_i)}_{\beta_j} R_j + \cdots + \underbrace{\gamma_m}_{\beta_m} R_m$$

$$\beta_j = \gamma_j + \alpha\beta_i$$
$$\gamma_j = \beta_j - \alpha\beta_i$$

Allora prendo
$\gamma_1 = \beta_1$
$\gamma_2 = \beta_2$
$\vdots$
$\gamma_i = \beta_i$

$\gamma_j = \beta_j - \alpha\beta_i$
$\vdots$
$\gamma_m = \beta_m$

Allora $v \in V_2$.

Adesso, prendiamo $v \in V_2$.

$$v = \beta_1 R_1 + \dots + \beta_i(R_i + \alpha R_j) + \dots + \beta_j R_j + \dots + \beta_m R_m$$
$$= \beta_1 R_1 + \dots + \beta_i R_i + \dots + (\beta_j + \alpha\beta_i) R_j + \dots + \beta_m R_m$$

Cioè $v \in V_1$. Questo dimostra che $V_1 = V_2$, come volevamo dimostrare.