23/03/2026

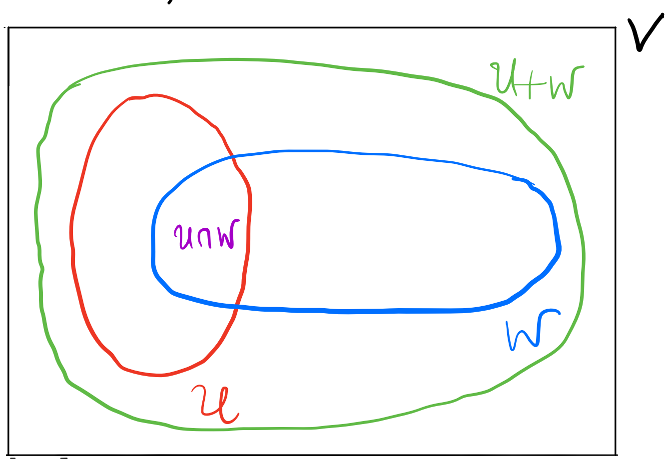
V spazio vettoriale su $\mathbb{k}$, $\mathcal{U}$ e W sottospazi di V.
($\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$)

Allora $\mathcal{U}\cap W = \{v\in V : v\in\mathcal{U} \text{ e } v\in W\}$

e $\mathcal{U}+W = \{v\in V : \text{esistono } u\in\mathcal{U} \text{ e } w\in W \text{ tali che } v = u+w\}$

sono sottospazi, mentre $\mathcal{U}\cup W = \{v\in V : v\in\mathcal{U} \text{ o } v\in W\}$ non è, in generale, un sottospazio.

Schematicamente, abbiamo:



<u>Esercizio</u>: $V=\mathbb{R}^4$

$\mathcal{U} = \langle (1,0,1,-1), (2,0,1,0)\rangle$

$W = \langle (0,1,0,-1), (1,1,0,0)\rangle$

a) Si trovi una base di $\mathcal{U}\cap W$
b) Si trovi una base di $\mathcal{U}+W$

Osserviamo che $\{(1,0,1,-1),(2,0,1,0)\}$ è una base di U e $\{(0,1,0,-1),(1,1,0,0)\}$ è una base di W poichè entrambi insiemi generano i sottospazi dati e sono l.i. poichè non sono multipli uno dall'altro.

a) Troviamo per prima le equazioni Cartesiane di U e W.

Equazioni Cartesiane di U:

$$(x,y,z,t)=\alpha(1,0,1,-1)+\beta(2,0,1,0)$$

$$\begin{cases} x=\alpha+2\beta \\ y=0 \\ z=\alpha+\beta \\ t=-\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ z=-t+\beta \\ \alpha=-t \end{cases} \iff \begin{cases} x=-t+2z+2t \\ y=0 \\ \beta=z+t \\ \alpha=-t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x=t+2z \\ y=0 \end{matrix}} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

equazioni Cartesiane di U.

Equazioni Cartesiane di W:

$$(x,y,z,t)=\alpha(0,1,0,-1)+\beta(1,1,0,0)$$

$$\begin{cases} x=\beta \\ y=\alpha+\beta \\ z=0 \\ t=-\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \beta=x \\ \boxed{\begin{matrix} y=-t+x \\ z=0 \end{matrix}} \\ \alpha=-t \end{cases}$$

equazioni Cartesiane di W.

Adesso l'intersezione di U e W è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo ottenuto mettendo insieme le equazioni Cartesiane di U e di W:

$$\begin{cases} x = t + 2z \\ y = 0 \\ y = -t + x \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ y = 0 \\ -x + y + t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{R_3}{-2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x, y, t variabili dominanti

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

t variabile libera.

Scegliendo un valore per t, per esempio $t = 1$, ottengo una soluzione $(1, 0, 0, 1)$.
Si osservi che questa soluzione genera il sottospazio di soluzioni. Infatti:

$$(t, 0, 0, t) = t(1, 0, 0, 1)$$

Allora si ha $U \cap W = \langle (1, 0, 0, 1) \rangle$

Siccome questo singolo vettore non è nullo, lui è l.i. e quindi $\{(1,0,0,1)\}$ è una base per $U \cap W$. Si osservi $\dim U \cap W = 1$.

6) Troviamo adesso una base per $U+W$. Dalla settimana scorsa risulta che

$$U + W = \langle (1,0,1,-1), (2,0,1,0), (0,1,0,-1), (1,1,0,0) \rangle$$

Verifichiamo se questi vettori sono l.i..

$$\alpha(1,0,1,-1) + \beta(2,0,1,0) + \gamma(0,1,0,-1) + \delta(1,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - \gamma = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{matrice completa} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to -R_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ δ è variabile libera. Scelgo $\delta = 1$ e ottengo

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0 \\ \beta + 1 = 0 \\ \gamma + 1 = 0 \\ \delta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

Allora abbiamo

$$(1,0,1,-1) - (2,0,1,0) - (0,1,0,-1) + (1,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

Allora questo vuole dire che qualunque di questi quattro vettori si scrive come combinazione lineare degli altri, e quindi possiamo toglierlo dal insieme di generatori.

Togliamo il vettore $(1,0,1,-1)$. Allora si ha

$$U + W = \langle (2,0,1,0), (0,1,0,-1), (1,1,0,0) \rangle$$

Usando i calcoli precedenti, per vedere se questi vettori sono l.i. basta guardare le soluzioni del sistema che hanno $\alpha = 0$.

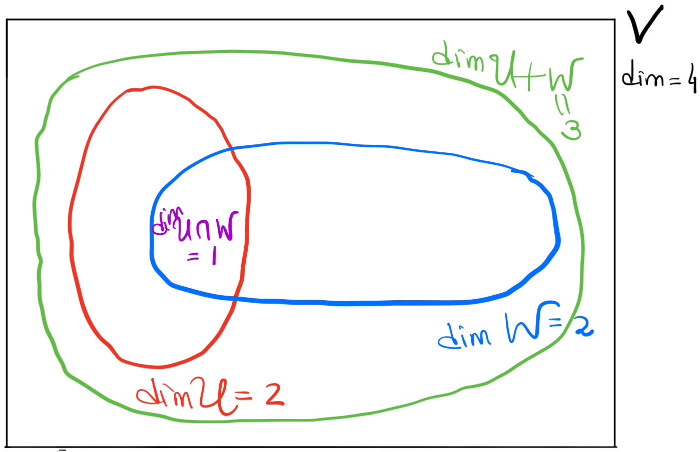
il sistema ridotto con $\alpha = 0$ è

$$\begin{cases} 2\beta + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta = -2\beta \\ -\beta = 0 \\ \rule{2em}{0.4pt} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \delta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Risulta allora che $\{(2,0,1,0), (0,1,0,-1), (1,1,0,0)\}$ è una base di $U+W$, e $\dim(U+W) = 3$.

$\dim U = 2$
$\dim W = 2$
$\dim U+W = 3$
$\dim U \cap V = 1$



Osservatione: $\underset{3}{\underset{\shortparallel}{\dim U+W}} \neq \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim U}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim W}}$

però $\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W)$

<u>Teorema 1.26</u> (Formula di Grassmann) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ e siano U e W due sottospazi di V, $\dim_{\mathbb{K}} U = n$, $\dim_{\mathbb{K}} W = m$.

Allora si ha che

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(U+W) = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(U\cap W)}$$

Dimostrazione omessa (si veda Bottacin, Prop. 1.3.48)

<u>Definizione 1.27</u> Due sottospazi U e W in uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) si dicono in <u>somma diretta</u> se $U\cap W = \{0_V\}$. In tale caso, la formula di Grassmann ci dice che

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W \left(-\overset{\dim(U\cap W)}{0}\right)$$

Esempio Nel esempio precedente, U e W non sono in somma diretta poichè la loro intersezione è non-banale (non-nulla).

Scegliamo un vettore in $U+W$, per esempio $(2,0,1,0)$. Scriviamolo come una somma di un elemento in U con un elemento in W.

$$(2,0,1,0) = \underbrace{(2,0,1,0)}_{\in U} + \underbrace{(0,0,0,0)}_{\in W}$$

$$= \underbrace{(2,0,1,0)+(1,0,0,1)}_{\in U} + \underbrace{-(1,0,0,1)}_{\in W}$$

$$(2,0,1,0) = \underbrace{(3,0,1,1)}_{\in U} + \underbrace{(-1,0,0,-1)}_{\in W}$$

Quindi $(2,0,1,0)$ non scrive in modo unico come somma di un vettore di U con un vettore di W e questo si deve al fatto che l'intersezione non è nulla.

Proposizione 1.28 Se due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$) sono in somma diretta, allora per ogni vettore v in $U+W$ esistono vettori $u \in U$ e $w \in W$ <u>unicamente determinati</u> tali che $v = u + w$.

<u>Dimostrazione</u>: Siccome v appartiene a $\mathcal{U}+W$, allora esistono $u \in \mathcal{U}$ e $w \in W$ tali che $v = u+w$.
Bisogna dimostrare che u e w sono unici!
Supponiamo di avere due espressioni

$$v = u + w \quad e \quad v = \tilde{u} + \tilde{w} \quad \text{dove}$$

$u, \tilde{u} \in \mathcal{U}$ e $w, \tilde{w} \in W$. Vogliamo dimostrare che $u = \tilde{u}$ e $w = \tilde{w}$.

$$0_V = v - v = (u+w) - (\tilde{u}+\tilde{w})$$
$$\Leftrightarrow \quad 0_V = (u-\tilde{u}) + (w - \tilde{w})$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\tilde{u} - u = w - \tilde{w}}$$

$\hookrightarrow$ da questa uguaglianza si conclude che $w - \tilde{w}$ è un vettore di W (poichè è combinazione lineare di w e $\tilde{w}$) e anche un vettore di $\mathcal{U}$ (poichè è combinazione lineare di $\tilde{u}$ e u). Allora $w - \tilde{w} \in \mathcal{U} \cap W = \{0_V\}$ e $w - \tilde{w} = 0_V$, cioè $w = \tilde{w}$,

Di conseguenza $\tilde{u} - u = 0_V \Leftrightarrow \tilde{u} = u$.

$\blacksquare$

Domanda: Dato un sottospazio U di V, esiste un' altro sottospazio W di V tale che

$$U \cap W = \{0_V\}$$
$$U + W = V \quad ?$$

Un tale sottospazio W si chiamerebbe **un complemento per U in V**.

Proposizione 1.29: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) e sia U un suo sottospazio. Allora esiste un complemento per U in V, cioè un sottospazio W tale che

$$U \cap W = \{0_V\}$$
$$U + W = V.$$