

Esercizi per il corso di MATEMATICA
Corsi di laurea in Chimica, Chimica Industriale
Foglio 8
18 marzo 2026

Gli esercizi segnati con asterisco sono estratti/adattati dal libro di F. Bottacin, *Algebra Lineare e Geometria*, Società Editrice Esculapio (2021)

1. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{C} :

$$X = \{2 + i\} \quad Y = \{1 + i, 1 - i\}$$

Si giustifichi se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) L'insieme X è una base di \mathbb{C} come spazio vettoriale su \mathbb{C} .
- (b) L'insieme Y è una base di \mathbb{C} come spazio vettoriale su \mathbb{C} .
- (c) L'insieme X è una base di \mathbb{C} come spazio vettoriale su \mathbb{R} .
- (d) L'insieme Y è una base di \mathbb{C} come spazio vettoriale su \mathbb{R} .

2. Consideriamo il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4

$$W = \langle (2, 3, 1, -1), (4, 0, 1, 1), (-4, 6, 0, -4) \rangle$$

- (a) Si determini una base per W .
- (b) Si trovi una base di \mathbb{R}^4 che contenga una base di W .

3. Sia V lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

- (a) Si determini una base per V .
- (b) Sia W il sottoinsieme degli elementi y di V per cui $y(0) = y'(0)$.
 - i. Si dimostri che W è un sottospazio.
 - ii. Si trovi una base per W .
 - iii. Si completi una base di W ad una base di V .

4. Si consideri in \mathbb{R}^3 il seguente sottospazio:

$$V = \langle (1, 3, -1), (4, 1, 0), (-2, 5, -2), (3, -2, 1) \rangle$$

- (a) Si determini una base per V .
- (b) Si completi la base trovata ad una base di \mathbb{R}^3 , sia usando il Teorema dello scambio, che usando le equazioni cartesiane di V .

5. * In \mathbb{R}^4 si considerino i sottospazi

$$U = \langle (1, 2, 3, 4), (2, 2, 2, 6), (0, 2, 4, 4) \rangle \quad V = \langle (1, 0, -1, 2), (2, 3, 0, 1) \rangle.$$

Si determinino basi per U , V , $U \cap V$ e $U + V$.

6. * In \mathbb{R}^4 si considerino i seguenti vettori $v_1 = (0, 1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, -1)$, $v_3 = (3, 2, 2, -1)$, $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ e $v_5 = (0, 0, 0, 1)$. Si dica (e si giustifichi) se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle (1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2) \rangle$
- (b) $(1, 1, 0, 0)$ appartiene al sottospazio $\langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$
- (c) $\dim_{\mathbb{R}}(\langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle v_2, v_3, v_4 \rangle) = 1$
- (d) $\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^4$
- (e) $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle + \langle v_4, v_5 \rangle = \mathbb{R}^4$