Prof. Jorge Vitória
Università degli Studi di Padova, 2025/2026

Esercizi per il corso di MATEMATICA

Corsi di laurea in Chimica, Chimica Industriale

Foglio 7

11 marzo 2026

1. Torniamo al foglio di esercizi precedente.
   (a) Si trovi una base per ogni sottospazio considerato nel esercizio 3 del Foglio 6.
   (b) Si verifichi se gli insiemi $\{v_1, v_2, v_3\}$ del esercizio 5 del Foglio 6 costituiscono o no una base di $\mathbb{R}^3$.

2. Si consideri l'insieme di vettori in $\mathbb{R}^4$
$$\mathcal{S} = \{(0,1,1,1),(1,-1,-1,1),(1,0,1,1),(0,0,-1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$$
   (a) Si dimostri che $\mathcal{S}$ genera $\mathbb{R}^4$.
   (b) Si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ contenuta in $\mathcal{S}$.
   (c) Si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ diversa della precedente e ancora contenuta in $\mathcal{S}$.

3. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:
$$u = (1,1,0,0,0), \;\; v = (0,1,1,0,0) \;\; w = (0,0,1,1,0) \;\; t = (0,0,0,1,1) \;\; z = (1,0,0,0,1)$$
   (a) Si dimostri che $B = \{u, v, w, t, z\}$ è una base di $\mathbb{R}^5$.
   (b) Si determinino le coordinate dei seguenti vettori rispetto alla base B
$$k = (1,2,1,0,0), \;\; m = (-2,-2,-2,-2,0) \;\; n = (1,2,0,0,1)$$
   (c) Si dimostri che $\{k, m, n\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.
   (d) Si usi la tecnica della dimostrazione del teorema dello scambio per trovare una base di $\mathbb{R}^5$ che contenga i vettori k, m e n.

4. Si considerino i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^4$.
$$S = \{s_1 := (1,1,1,1), s_2 := (0,1,2,-1), s_3 := (1,0,-2,3), s_4 := (2,1,0,-1), s_5 := (4,3,2,1)\}$$
$$T = \{t_1 := (1,2,3,4), t_2 := (0,1,2,-1), t_3 := (3,4,5,16)\}$$
$$U = \{u_1 := (1,2,3,4), u_2 := (0,1,2,-1), u_3 := (2,1,0,11)\}$$
   (a) Si determini se gli insiemi S, T e U sono insiemi di vettori linearmente indipendenti. In caso negativo si tolgono un numero minimo di vettori in tale modo che i rimanenti siano linearmente indipendenti.
   (b) Si determini se gli insiemi S, T e U sono insiemi di generatori di $\mathbb{R}^4$. In caso positivo, si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ contenuta in tale insieme. In caso negativo, si determini la dimensione del sottospazio generato da loro.

5. Per ognuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ si trovi una base, si indichi la dimensione e si completi la base ottenuta ad una base di $\mathbb{R}^4$.
   (a) $U = \langle(1,2,3,4),(2,2,2,6),(0,2,4,4)\rangle$
   (b) $V = \langle(1,-1,1,-1),(2,0,0,2)\rangle$
   (c) $W = \langle(0,0,1,1),(-1,0,2,3),(1,0,1,0)\rangle$
   (d) $R = \langle(1,2,3,4),(-1,1,1,-1),(0,3,4,3)\rangle$