18/03/2026

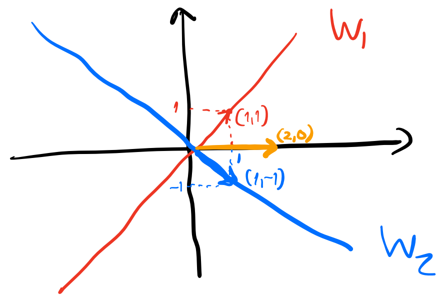
Ricordiamo che, dati due sottospazi W_1 e W_2 di V, l'intersezione $W_1 \cap W_2$ è ancora un sottospazio di V.

Ma l'unione $W_1 \cup W_2$, in generale, non lo è!

Esempio $V = \mathbb{R}^2$

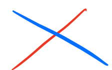
$W_1 = \langle (1,1) \rangle$

$W_2 = \langle (1,-1) \rangle$



$W_1 \cup W_2$ non è sottospazio poichè, per esempio

$$(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin \underbrace{W_1 \cup W_2}_{\substack{\text{insieme dei punti} \\ \text{nella "croce"}}}$$



Domanda: Riusciamo a creare un sottospazio di V che contenga sia W_1 che W_2? Chiaramente, l'unione non serve!

Proposizione 1.24 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Siano W_1 e W_2 due sottospazi di V. Allora

$$\text{"}W_1 + W_2\text{"} = \{ w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2 \}$$

è un sottospazio di V, che contiene W_1 e W_2.

Dimostrazione: Prendiamo due vettori v e u nel insieme $W_1 + W_2$. Allora esistono $v_1 \in W_1$ e $v_2 \in W_2$

tali che $v = v_1 + v_2$ e esistono $u_1 \in W_1$ e $u_2 \in W_2$ tali che $u = u_1 + u_2$. Prendiamo due scalari α e β in $\mathbb{K}$ e consideriamo la combinazione lineare $\alpha v + \beta u$. Vogliamo vedere che $\alpha v + \beta u \in W_1 + W_2$.

$$
\begin{aligned}
\alpha v + \beta u &= \alpha(v_1 + v_2) + \beta(u_1 + u_2) \\
&= \underbrace{(\alpha v_1 + \beta u_1)}_{\substack{\text{appartiene a } W_1 \\ \text{poiché } v_1, u_1 \in W_1 \\ \text{e } W_1 \text{ è sottospazio}}} + \underbrace{(\alpha v_2 + \beta u_2)}_{\substack{\text{appartiene a } W_2 \\ \text{poiché } v_2 \text{ e } u_2 \in W_2 \\ \text{e } W_2 \text{ è sottospazio.}}}
\end{aligned}
$$

Allora si ha che $\alpha v + \beta u$ è la somma di un elemento in W_1 con un elemento di W_2 e allora $\alpha v + \beta u$ appartiene a $W_1 + W_2$. Quindi $W_1 + W_2$ è sottospazio.

Si osservi che per ogni elemento $w_1 \in W_1$, $w_1 = \underbrace{w_1}_{\in W_1} + \underbrace{0_V}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$ e per ogni elemento w_2 in W_2, abbiamo $w_2 = \underbrace{0_V}_{\in W_1} + \underbrace{w_2}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

<u>Conclusione</u>: Sia W_1 che W_2 sono contenuti in $W_1 + W_2$. $\blacksquare$

Esempio $W_1 = \langle (1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$
$W_2 = \langle (1,-1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad W_1 + W_2 = ?$

Si osservi che, guardando la lista di sottospazi di $\mathbb{R}^2$, l'unico sottospazio che contiene entrambi W_1 e W_2 è $\mathbb{R}^2$ e allora si ha $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$.

Vediamo: è possibile scrivere ogni elemento di $\mathbb{R}^2$ come somma di un elemento di W_1 con un'elemento di W_2? Cioè, è vero che $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ esistono α e β tali che

$$(x,y) = \underbrace{\alpha(1,1)}_{\text{vettore in } W_1} + \underbrace{\beta(1,-1)}_{\text{vettore in } W_2} ?$$

Si osservi che, infatti, $(1,1)$ e $(1,-1)$ non essendo multipli uno dall'altro sono l.i. e allora formano una base di $\mathbb{R}^2$. In particolare generano $\mathbb{R}^2$. Quindi si ha infatti una risposta positiva alla domanda precedente.

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2.$$

Lemma 1.25 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e siano W_1 e W_2 sottospazi di V.

Supponiamo che $W_1 = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$
$W_2 = \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle$.

Allora $W_1 + W_2 = \langle a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_r \rangle$.

Dimostrazione:

un vettore v appartiene a $W_1 + W_2$ se è della forma $v = w_1 + w_2$ per $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$

$$v = \underbrace{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k}_{w_1} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_r b_r}_{w_2}$$

Allora $v \in \langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r \rangle$.

Questo dimostra $W_1 + W_2 \subseteq \langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r \rangle$

Per vedere che $\langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r \rangle \subseteq W_1 + W_2$, prendiamo una combinazione lineare

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_r b_r$$

e vediamo che appartiene a $W_1 + W_2$.

Siccome $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \in W_1$ e $\beta_1 b_1 + \dots + \beta_r b_r \in W_2$ allora quella combinazione lineare appartiene a $W_1 + W_2$, dimostrando allora che

$$W_1 + W_2 = \langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r \rangle$$