17/03/2026

V spazio vettoriale su k.

$\dim_k V$ = numero di vettori in una base di V
= numero minimo di generatori di V
= numero massimo di vettori linearmente indipendenti in V.

Esempio: $\mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi.

- $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$: questo è semplicemente conseguenza del fatto già visto che $\mathbb{C}^n$ è spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: infatti se prendiamo scalari soltanto numeri reali, tutti gli assiomi (1) – (8) di spazio vettoriale vengono comunque soddisfatti.

Per esempio: $\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} \cdot (\underset{\in \mathbb{C}}{v_1} + \underset{\in \mathbb{C}}{v_2}) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

Base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$

$(a+bi) = \underbrace{?}\, i$

$? = (a+bi)(-i)$
$= -ai+b$

$(a+bi) = (-ai+b)\, i$

quindi i è un generatore di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale.

"vettore"

$(a+bi) = \underbrace{(a+bi)}_{\text{"scalare"}}\ \underbrace{1}_{\text{"vettore"}}$

Base $\{1\}$

Base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$.

$\langle 1 \rangle = \{a+0i : a \in \mathbb{R}\}$

$\langle 1, i \rangle = \{\underset{\in \mathbb{R}}{a} \cdot 1 + \underset{\in \mathbb{R}}{b} \cdot i\} = \mathbb{C}$

$\underset{\in \mathbb{R}}{\alpha} \cdot 1 + \underset{\in \mathbb{R}}{\beta} \cdot i = 0$

$\mathrm{Re}(\alpha+\beta i) = \alpha$
$\mathrm{Im}(\alpha+\beta i) = \beta$

e allora questo numero $\alpha+\beta i = 0$
$\iff \alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Quindi Base: $\{1, i\}$

Allora si ha $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ e $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Esempio: Si considerino i vettori

$$v_1 = (1,2,0) \quad v_2 = (0,2,0) \quad v_3 = (2,0,1)$$

È vero o falso che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?

Verifichiamo per prima se sono vettori l.i.

$$\alpha(1,2,0) + \beta(0,2,0) + \gamma(2,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Sì, sono l.i.!

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Dal teorema dello scambio esiste una base che contiene v_1, v_2 e v_3. Però tale base non può avere più vettori perchè 3 è il numero massimo di l.i. in $\mathbb{R}^3$. Allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Proposizione 1.22: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un insieme di vettori di V. Le seguenti affermazioni

Sono equivalenti:

(a) $\mathcal{B}$ è una base di V

(b) V ha dimensione n e i vettori di B sono l.i.

(c) V ha dimensione n e i vettori di B generano V.

Dimostrazione: Dimostriamo l'equivalenza fra tutte le affermazioni dimostrando che:

$(a) \Rightarrow (b)$ ("se (a) allora (b)")

$(b) \Rightarrow (c)$ ("se (b) allora (c)")

$(c) \Rightarrow (a)$ ("se (c) allora (a)")

$(a) \Rightarrow (b)$: Supponiamo che B è una base di V. Allora la dimensione di V è il numero di vettori in B, ovvero n, e i vettori di B sono automaticamente l.i.

$(b) \Rightarrow (c)$: supponiamo che $\dim V = n$ e che gli elementi di B sono l.i. Dal teorema dello Scambio, esiste una base di V contenendo B. Però n è il numero massimo di vettori l.i. in V, per cui non possiamo aggiungere altri vettori a B e B è, pertanto, una base.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Supponiamo che $\dim V = n$ e che gli elementi di B generano V. Vogliamo dimostrare che B è una base, ovvero che B è fatto di vettori l.i.
Come dimostrato in precedenza, siccome B genera V, esiste una base di V contenuta in B. Però tale base deve avere esattamente n elementi poiché la dimensione di V è n. Allora questo vuole dire che non possiamo togliere nessun vettore dipendente da B, ovvero loro sono già l.i. ∎

Esempio Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ contenendo i vettori

$$w_1 = (0,2,2) \quad e \quad w_2 = (1,2,3)$$

Dalla proposizione precedente risulta che basta trovare un altro vettore v tale che $\{w_1, w_2, v\}$ siano indipendenti per trovare una base.
Chi sono i vettori dipendenti da w_1 e w_2? ovvero chi sono i vettori nel sottospazio $\langle w_1, w_2 \rangle$?

$$(x,y,z) = \alpha(0,2,2) + \beta(1,2,3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta \\ y = 2\alpha + 2\beta \\ z = 2\alpha + 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2\alpha = y - 2x \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x \\ \alpha = \frac{1}{2}y - x \\ z = y - 2x + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \boxed{z = y + x} \end{cases}$$

Per completare w_1 e w_2 ad una base di R^3 basta scegliere un vettore (x,y,z) per cui $z \neq y+x$, ovvero tale che $(x,y,z) \notin \langle w_1, w_2 \rangle$.
Per esempio, mettendo $(0,1,0) = v$ abbiamo che $v \notin \langle w_1, w_2 \rangle$ e quindi

$\{w_1, w_2, v\}$ è una base di R^3.

Esempio: Consideriamo il sottospazio generato da $w_1 = (1,-1,1,-1)$ e $w_2 = (0,1,-1,1)$ in R^4. Completiamo w_1 e w_2 ad una base di R^4.

Cerchiamo le equazioni cartesiane del sottospazio $\langle w_1, w_2 \rangle$:

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,-1,1,-1) + \beta(0,1,-1,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \\ t = -\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = x + y \\ \boxed{\begin{array}{l} z = -y \\ t = y \end{array}} \end{cases}$$

Scegliamo un vettore che non appartiene al sottospazio: $(0,1,0,0) \notin \langle w_1, w_2 \rangle$
Adesso calcoliamo l'equazione cartesiana del sottospazio generato da w_1, w_2 e $(0,1,0,0)$

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,-1,1,-1) + \beta(0,1,-1,1) + \gamma(0,1,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + \beta + \gamma \\ z = \alpha - \beta \\ t = -\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y + x - \gamma \\ z = x - (y + x - \gamma) \\ \text{——} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ \text{——} \\ z = -y + \gamma \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y + x - \gamma \\ \gamma = z + y \\ \text{——} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y + x - (z+y) \\ \gamma = z + y \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = x - z \\ \text{——} \\ t = -x + (x - z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ \text{——} \\ \text{——} \\ \boxed{t = -z} \end{cases}$$

Allora $(0,0,1,1) \notin \langle w_1, w_2, (0,1,0,0) \rangle$ e quindi
$$\{(1,-1,1,-1), (0,1,-1,1), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\}$$
è una base di $\mathbb{R}^4$!

⚠ Dobbiamo aggiungere un vettore alla volta, per essere sicuri che quello che aggiungiamo è l.i. con i precedenti.

Lemma 1.23 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$) e sia W un suo sottospazio. Se $\dim_{\mathbb{k}} V = n$ allora $\dim_{\mathbb{k}} W \leq n$.

Dimostrazione: (...) Sia $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di W. Vogliamo dimostrare che $k \leq n$. Siccome $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori l.i. in W (e allora in V) e n è il numero massimo di vettori l.i. in V (essendo la dimensione), abbiamo che $k \leq n$. $\blacksquare$

Esempi: Chi sono i sottospazi di $\mathbb{R}^2$?

Se W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, allora

$$\dim W \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

Allora $\dim W = 0$ o $\dim W = 1$ o $\dim W = 2$.

- $\dim W = 0 \leadsto W = \{(0,0)\}$

Attenzione: L'unico spazio vettoriale di dimensione 0 è lo spazio con solo il vettore nullo. In tale spazio la base è vuota perchè il vettore nullo è sempre l.d.

- $\dim W = 1 \leadsto W$ ha una base formata da un vettore $v = (a, b) \neq (0,0)$

Quindi gli elementi di W sono i punti predisposti in una retta passante nell'origine.

- $\dim W = 2 \rightsquigarrow W$ ha una base con 2 elementi, ma allora $W = \mathbb{R}^2$.

Analogamente in $\mathbb{R}^3$: se W è un sottospazio, allora $\dim W = 0$ o $\dim W = 1$ o $\dim W = 2$ o $\dim W = 3$

$$W = \begin{cases} \{(0,0,0)\} & \text{se } \dim W = 0 \\ \text{retta passante in } (0,0,0) & \text{se } \dim W = 1 \\ \text{piano passante in } (0,0,0) & \text{se } \dim W = 2 \\ W = \mathbb{R}^3 & \text{se } \dim W = 3. \end{cases}$$

(*) <u>Attenzione</u>: Come sapiamo che W ha una base $\{w_1, \dots, w_k\}$?
Si osservi che un insieme di vettori l.i. in W lo è anche in V, per cui un tale insieme non può avere più di n vettori.
Se $W = \{0_V\}$, allora $\dim W = 0$ e $\dim W \leq n$.
Se $W \neq \{0_V\}$, prendiamo $w_1 \neq 0$ in W. Se $\langle w_1 \rangle = W$, allora $\{w_1\}$ è una base, altrimenti esiste $w_2 \neq 0$ tale che $\{w_1, w_2\}$ sono l.i.
Proseguendo così, si ottiene una base di W (che per forza avrà meno di n elementi!).