16/03/2026

V spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$).
$\mathcal{B}=\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V se:

- $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$
- $v_1, \dots, v_n$ sono l.i.

In tale caso, ogni vettore v di V si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè esistono scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ che dipendono unicamente da v tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n .$$

Scriviamo allora $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$.

Come creare basi di uno spazio vettoriale?

① Se un insieme di vettori genera V, allora questo insieme contiene una base.

Algoritmo: Ⓘ Verificare (in)dipendenza lineare. Se indipendenti abbiamo trovato una base.
ⒾⒾ Se dipendenti, togliere un vettore che sia combinazione lineare degli altri.
ⒾⒾⒾ Ripetere Ⓘ e ⒾⒾ per l'insieme dei rimanenti.

② Se abbiamo un insieme di vettori l.i.?
Cioè riusciamo a costruire una base che li contenga.

Teorema 1.19 (Teorema dello Scambio / Teorema di Steinitz)
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$). Siano $w_1, \dots, w_r$ vettori in V linearmente indipendenti. Supponiamo che V è generato da un insieme di n vettori. Allora si ha che:

(1) $r \leq n$.

(2) Esiste una base di V che contiene i vettori $w_1, \dots, w_r$.

Dimostrazione: Siano $v_1, \dots, v_n$ generatori di V. Scriviamo

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$ poichè $v_1, \dots, v_n$ generano V. Si osservi che almeno uno di questi scalari non è nullo poichè se tutti fossero nulli w_1 sarebbe il vettore nullo e allora l'insieme $\{w_1, \dots, w_r\}$ non sarebbe linearmente indipendente. Supponiamo senza perdita di generalità che $\alpha_1 \neq 0$. Allora

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}(w_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_n v_n)$$

Questo vuole dire che l'insieme $\{v_1, \dots, v_n, w_1\}$ è l.d. e v_1 è combinazione lineare degli altri, per cui si ha

$$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n, w_1 \rangle$$
$$= \langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

Adesso ripetiamo la procedura per w_2.

Allora $w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \dots + \beta_n v_n$ poichè $w_1, v_2, \dots, v_n$ generano V. Vediamo adesso che esisto uno scalare $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ che non è nullo. Se fossero tutti nulli avrei $w_2 = \beta_1 w_1$, ma questo non è possibile poichè $w_1, \dots, w_r$ sono indipendenti. Quindi abbiamo che almeno uno fra $\beta_2, \dots, \beta_n$ è non nullo. Diciamo senza perdita di generalità che $\beta_2 \neq 0$ (altrimenti cambierei l'ordine dei vettori v_i).

$$v_2 = \frac{1}{\beta_2}(w_2 - \beta_1 w_1 - \beta_3 v_3 - \dots - \beta_n v_n)$$

Di nuovo, abbiamo

$$V = \langle w_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle w_1, w_2, v_2, \ldots, v_n \rangle$$
$$= \langle w_1, w_2, v_3, \ldots, v_n \rangle$$

Continuiamo così, inserendo un vettore dei $w_1, \ldots, w_r$ alla volta e ottenendo un insieme di generatori

$$\langle \underbrace{w_1, w_2, \ldots, w_k,}_{\text{linearmente indipendenti}} v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle = V$$

Se $r > n$, allora dopo n iterazioni del algoritmo descritto sopra, si avrebbe che $\{w_1, \ldots, w_n\}$ genererebbe V. Quindi si avrebbe w_{n+1} combinazione lineare di $w_1, \ldots, w_k$. Ma questi erano per ipotesi linearmente indipendenti, rendendo questa affermazione impossibile. Allora si ha $r \leq n$.

Facendo r sostituzioni, abbiamo allora un insieme di generatori

$$V = \langle w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$$

Usando la proposizione della settimana scorsa, possiamo togliere vettori in modo a trovare una base. Vorrei però che non si togliesse nessun dei vettori $w_1, \ldots, w_r$.

Se $\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ è un insieme l.i. allora questo insieme è una base che contiene i vettori $w_1, \ldots, w_r$. Se invece sono l.d. allora esistono scalari non tutti nulli tali che

$$(*) \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_r w_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

Vorrei vedere che infatti almeno uno dei scalari
$\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ non è nullo in modo
a potere togliere dal insieme uno dei vettori $v_{r+1}, \ldots, v_n$.
Se $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_n = 0$, allora si avrebbe

$$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r = 0$$

Siccome, di partenza, avevamo $w_1, \ldots, w_r$ l.i. allora si avrebbe che anche $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$, ma questo contradirebbe l'ipotesi che non tutti gli scalari in (*) fossero nulli.

Allora si conclude che esiste almeno uno scalare non nullo fra $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ e, di conseguenza, posso togliere dal insieme $\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ il corrispondente vettore fra $v_{r+1}, \ldots, v_n$.
Adesso si ripete la procedura finchè non si trova la base di V che conterrà necessariamente i vettori $w_1, \ldots, w_r$. $\blacksquare$

Esempio: Consideriamo i seguenti vettori l.i. in $\mathbb{R}^4$:

$$w_1 = (0,2,-1,2) \quad e \quad w_2 = (0,0,1,-2).$$

Si trovi una base di $\mathbb{R}^4$ che li contenga.

Si osservi inanzitutto che w_1 e w_2 sono l.i. poichè non sono riscalamento uno dal'altro. Usiamo allora il teorema dello scambio e la sua dimostrazione per trovare una tale base.

Passo 1: Scegliamo un insieme di generatori di $\mathbb{R}^4$.

Per esempio, prendiamo

$$\mathbb{R}^4 = \Big\langle \underset{\substack{\parallel \\ v_1}}{(1,0,0,0)}, \underset{\substack{\parallel \\ v_2}}{(0,1,0,0)}, \underset{\substack{\parallel \\ v_3}}{(0,0,1,0)}, \underset{\substack{\parallel \\ v_4}}{(0,0,0,1)} \Big\rangle$$

$$w_1 = 0 \cdot v_1 + 2 v_2 + (-1) v_3 + 2 v_4$$

Scegliamo uno scalare non-nullo in questa combinazione lineare (diciamo il coefficiente di v_2) e allora abbiamo

$$v_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + v_3 - 2 v_4\right)$$

Quindi posso togliere v_2 dal insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4, w_1\}$ ottenendo un insieme di generatori

$$\mathbb{R}^4 = \langle w_1, v_1, v_3, v_4 \rangle$$

Adesso scriviamo w_2 come combinazione lineare di w_1, v_1, v_3 e v_4.

$$\underset{\substack{\parallel \\ w_2}}{(0,0,1,-2)} = \alpha \overset{\substack{w_1 \\ \parallel}}{(0,2,-1,2)} + \beta \overset{\substack{v_1 \\ \parallel}}{(1,0,0,0)} + \gamma \overset{\substack{v_3 \\ \parallel}}{(0,0,1,0)} + \delta \overset{\substack{v_4 \\ \parallel}}{(0,0,0,1)}$$

$$\begin{cases} 0 = \beta \\ 0 = 2\alpha \\ 1 = -\alpha + \gamma \\ -2 = 2\alpha + \delta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 1 \\ \delta = -2 \end{cases}$$

$$w_2 = 0\, w_1 + 0\, v_1 + v_3 - 2 v_4$$

$$v_3 = w_2 + 2 v_4$$

Allora dal insieme $\{w_1, v_1, v_3, v_4, w_2\}$ posso togliere v_3 e ottengo comunque un insieme di generatori

$$\mathbb{R}^4 = \langle w_1, v_1, w_2, v_4 \rangle$$

Vediamo adesso se questi 4 vettori sono l.i.:

$$\alpha(0,2,-1,2)+\beta(1,0,0,0)+\gamma(0,0,1,-2)+\delta(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ 2\alpha=0 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ 2\alpha-2\gamma+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \\ \delta=0 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato una base contenendo i due vettori dati.

Abbiamo visto che:

- Dato un'insieme di generatori riusciamo a togliere vettori in modo a trovare una base
- Dato un'insieme di vettori l.i. riusciamo ad aggiungere vettori in modo a trovare una base.

Corollario 1.20 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Supponiamo che V ha una base con n elementi. Allora:

(1) Se $\{w_1,\dots,w_r\}$ sono l.i., allora $r\leq n$.
(2) Se $\{w_1,\dots,w_r\}$ generano V, allora $n\leq r$
(3) Se $\{w_1,\dots,w_r\}$ è una base di V allora $n=r$.

Dimostrazione:

(1) Siccome V ha una base $\{v_1,\dots,v_n\}$, allora questi vettori generano V e siccome $\{w_1,\dots,w_r\}$

sono l.i. concludiamo dal teorema dello scambio che $r \leq n$.

(2) Siccome $\{w_1, \ldots, w_r\}$ generano V e siccome esiste una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, questi vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono l.i. e allora il teorema dello scambi ci dice che $n \leq r$.

(3) Se $\{w_1, \ldots, w_r\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono entrambe basi di V, abbiamo da (1) che $r \leq n$ e da (2) che $n \leq r$ e quindi $n = r$. $\blacksquare$

Definizione 1.21 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$). La dimensione di V su $\mathbb{k}$ è il numero di elementi in una base di V. Scriviamo

$$\dim_{\mathbb{k}} V \quad \text{per quel numero.}$$

Esempi: • $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ poichè la sua base canonica (e, di conseguenza, ogni base) ha n elementi.

• Soluzioni dell'equazione differenziale

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$
$$b^2 - 4ac > 0$$

Base: $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$ dove r_1 e r_2 sono radici dell'equazione caratteristica $ax^2 + bx + c = 0$.

Allora la dimensione di questo spazio è 2.

Osservazione : La dimensione di uno spazio vettoriale è il numero massimo di vettori l.i. che possiamo avere in tale spazio, ed è anche il numero minimo di generatori dello spazio.