

June 6, 2022

ESERCIZI GEOMETRIA 2 PARTE B
SETTIMANA 14 - DERIVATA COVARIANTE. THEOREMA EGREGIUM

Esercizio 1. Siano $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ dei campi vettoriali tangenti ad una superficie S . Supponiamo che $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ siano tangenti ad S . Sia inoltre $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Dimostrare le seguenti formule:

- (1) $\nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}_1) + \nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}_2)$.
- (2) $\nabla_{\mathbf{U}+\mathbf{V}}(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) + \nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V})$.
- (3) $\nabla_{F\mathbf{W}}(\mathbf{V}) = F(\nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}))$.
- (4) $\nabla_{\mathbf{W}}(F\mathbf{V}) = (\mathbf{W}(F))\mathbf{V} + F(\nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}))$.
- (5) $\mathbf{W}(\mathbf{V}_1 \bullet \mathbf{V}_2) = \nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}_1) \bullet \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \bullet \nabla_{\mathbf{W}}(\mathbf{V}_2)$.

Esercizio 2. Siano $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ tre campi vettoriali tangenti ad una superficie S . Sia inoltre $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$. Dimostrare le seguenti formule:

- (1) $D_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) = D_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) + D_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z})$.
- (2) $D_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}) = D_{\mathbf{X}}(\mathbf{Z}) + D_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z})$.
- (3) $D_{F\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}) = F D_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z})$.
- (4) $D_{\mathbf{Y}}(F\mathbf{Z}) = (\mathbf{Y}(F))\mathbf{Z} + F(D_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}))$.
- (5) $\mathbf{Y}(\mathbf{X} \bullet \mathbf{Z}) = D_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \bullet \mathbf{Z} + \mathbf{X} \bullet D_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z})$.