

May 23, 2022

ESERCIZI GEOMETRIA 2 PARTE B
SETTIMANA 12 -DIFFERENZIALI

Esercizio 1. Sia $\underline{x} : U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie elementare. Mostrare che l'area di S ,

$$\text{Area}(S) = \int_U \|x_u \wedge x_v\| \, dudv,$$

verifica l'uguaglianza

$$\text{Area}(S) = \int_U \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

dove $EG - F^2$ è il determinante della prima forma fondamentale (suggerimento: usare l'uguaglianza $\|v_1 \wedge v_2\|^2 = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - (v_1 \bullet v_2)^2$, valida per ogni coppia di vettori v_1 e v_2 di $\mathbb{R}^3$, dove abbiamo indicato con $\bullet$ il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$).

Esercizio 2. Mostrare che, data una funzione $f : X \rightarrow Y$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ tra due sottovarietà differenziabili $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, la definizione di differenziale vista a lezione

$$(df(x_0))(v) = \frac{d((f \circ \alpha)(t))}{dt}(0)$$

non dipende dalla curva scelta $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha'(0) = \frac{d\alpha(t)}{dt}(0) = v$.

Esercizio 3. Sia $\underline{x} : U \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione, dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto. Mostrare che per ogni $\underline{u}_0 \in U$ si ha

$$(d\underline{x}(\underline{u}_0))(1, 0) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}(\underline{u}_0),$$
$$(d\underline{x}(\underline{u}_0))(0, 1) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}(\underline{u}_0),$$

dove $d\underline{x}(\underline{u}_0) : T_{\underline{u}_0}(U) \rightarrow T_{\underline{x}(\underline{u}_0)}(X)$ indica il differenziale di $\underline{x}$ nel punto $\underline{u}_0$ (suggerimento: utilizzare le curve $\alpha_1(t) = (t, 0)$ e $\alpha_2(t) = (0, t)$).