

May 23, 2022

ESERCIZI GEOMETRIA 2 PARTE B
SETTIMANA 11 –BASE MOBILE DI FRENET PER CURVE A VELOCITÀ
ARBITRARIA

Esercizio 1. Sia $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva a velocità non nulla e sia $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ una riparametrizzazione a velocità unitaria di α ; poniamo $\alpha = \beta \circ \vartheta$, con $\vartheta : A \rightarrow B$ diffeomorfismo di classe C^∞ con $\vartheta'(t) > 0$ per ogni $t \in A$. Sia $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ la base mobile di Frenet e $\kappa(s)$ la curvatura di β . Definiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(t) &= \mathbf{t}(\vartheta(t)), \\ \mathbb{N}(t) &= \mathbf{n}(\vartheta(t)), \\ K(t) &= \kappa(\vartheta(t)).\end{aligned}$$

Dimostrare, imitando quanto visto a lezione, oppure utilizzando le formule per curve a valori in $\mathbb{R}^3$ considerando la curva $\tilde{\alpha} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ottenuta componendo α e l'iniezione $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$, la formula:

$$\alpha''(t) = \frac{dv(t)}{dt} \mathbb{T}(t) + K(t)v^2(t)\mathbb{N}(t)$$

dove $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ è la velocità di α .

Esercizio 2. Calcolare la funzione curvatura e il cerchio osculatore del cerchio $\mathbb{S}^1$ di centro $(0, 0)$ e raggio r .

Esercizio 3. Fissiamo due numeri reali $a > 0$ e $b < 0$ e sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la *spirale logaritmica* definita da $\sigma(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t))$. Determinare la funzione curvatura $K(t)$ di σ .

Esercizio 4. Determinare triedro di Frenet, curvatura e torsione della curva $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\sigma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

Esercizio 5. Determinare triedro di Frenet, curvatura e torsione della curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata da $\gamma(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)), bt)$ dove a e b sono due numeri reali positivi.

Esercizio 6. Dimostrare che la curva $\gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$ è contenuta in un piano.