Box Topology vs. Topologia prodotto

Luca Mastella

Questo esercizio mira a completare i punti mancati e a formalizzare quanto visto in classe durante al tutorato riguardo all'esempio della "Box Topology" sullo spazio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$.

Box Topology in astratto. *Sia I un insieme non vuoto di indici e sia dato per ogni $i \in I$ uno spazio topologico $(X_i, \mathcal{T}_i)$ non vuoto e una sua base $\mathscr{B}_i$. Sia*

$$X = \prod_{i\in I} X_i.$$

i. Si mostri che l'insieme

$$\mathscr{B}_{\text{BOX}} = \left\{ B = \prod_{i\in I} U_i : U_i \in \mathcal{T}_i \right\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

è base per una topologia su X, detta Box Topology.

ii. Si mostri che l'insieme

$$\mathscr{B}'_{\text{BOX}} = \left\{ B = \prod_{i\in I} B_i : B_i \in \mathscr{B}_i \right\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

è un'altra base per la Box topology su X. (sugg: ricorda l'esercizio 6 del foglio di esercizi della prima settimana di lezione)

Caso di $\mathbb{R}^n$. *Siano ora I un insieme finito di cardinalità n e $U_i = \mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea per ogni $i = 1, \dots, n$.*

iii. Mostrare che la box topology su $X = \mathbb{R}^n$ coincide con la topologia euclidea (sugg: usando come base su $\mathbb{R}$ gli intervalli aperti e limitati, descrivere come è fatta $\mathscr{B}'_{\text{BOX}}$?).

iv. Osservare che $\mathbb{R}^n$ fornisce un esempio del fatto che $\mathscr{B}_{\text{BOX}}$ non da luogo in generale una topologia su X (quale proprietà non viene verificata?).

Caso di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Siano ora $I = \mathbb{N}$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ sia $U_i = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Con queste scelte*

$$X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \}.$$

v. Descrivere esplicitamente gli insiemi $\mathscr{B}_{\text{BOX}}$ e $\mathscr{B}'_{\text{BOX}}$, usando su $\mathbb{R}$ la base data dagli intervalli aperti e limitati. Rappresentare graficamente alcuni di questi aperti, assegnando ad ogni $n \in \mathbb{N}$ una retta verticale nel piano.

vi. Gli insiemi $\mathscr{B}_{\text{BOX}}$ e $\mathscr{B}'_{\text{BOX}}$ forniscono solo una base di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o formano essi stessi una topologia? Giustificare la risposta con una dimostrazione o un controesempio.

vii. *Sia* $H = \prod_{n\in\mathbb{N}}(0,+\infty)$ *il* "semipiano superiore". *Mostrare che il punto* $\bar{0} = (0,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *è punto di accumulazione per* H, *dunque* $\bar{0} \in \bar{H}$.

viii. *Mostrare che non esiste successione in* H *convergente a* $\bar{0}$ *(sugg: data una successione* $(x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$, *tale che* $x^{(j)} \in H$, *ossia* $x^{(j)} = (x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \dots)$ *con* $x_n^{(j)} > 0$ *costruire un intorno aperto* U *di base di* $\bar{0}$ *tale che per ogni* j, $x^{(j)} \notin U$*). Dedurne che* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *con la Box topology non è uno spazio metrizzabile e che in particolare la box topology e la topologia prodotto su* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *non coincidono.*

ix. *Sia* $(x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *successione a valori in* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *puntualmente convergente a* $\bar{0}$ *e uniformemente definitivamente nulla per tutte le coordinate tranne al più un numero finito di esse (ovvero per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *le successioni* $(x_n^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *a valori in* $\mathbb{R}$ *sono convergenti a* 0 *per* $j \to \infty$, *inoltre esiste* $F \subseteq \mathbb{N}$ *finito e* $j_0 \in \mathbb{N}$ *tali che* $x_n^{(j)} = 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus F$ *e ogni* $j > j_0$*). Mostrare che allora* $(x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *converge a* $\bar{0}$ *per* $j \to \infty$.

x. *Mostrare che le successioni a valori in* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *convergenti per la box topology sono quelle puntualmente convergenti e uniformemente definitivamente costanti per tutte le coordinate tranne al più un numero finito di esse.*

xi. *Mostrare che la funzione* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f(t) = (t,t,\dots)$ *non è continua se assegnamo ad* $\mathbb{R}$ *la topologia euclidea e a* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *la box topology (sugg: considerare gli intervalli* $(-1/n, 1/n)$*). Notare che anche questo implica che la box topology e la topologia prodotto su* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *non coincidono.*

xii. *Mostrare che il sottoinsieme* $\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]$ *di* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *non è compatto per la box topology (come sottospazio di* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *ma si osservi che la topologia indotta da* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *coincide con la box topology data dalla topologia indotta da* $\mathbb{R}$ *sugli intervalli* $[0,1]$*).*

xiii. *Mostrare che i sottoinsiemi* $A, B \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *delle successioni rispettivamente limitate e illimitate sono entrambi aperti per la box topology, pertanto* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *per la box topology non è connesso (sugg: considera un intornino opportuno di una generica successione di* A *e di* B *e mostra che è tutto contenuto nei rispettivi insiemi).*

Confronto di connessione, compattezza e separazione in generale. *Siano ora nuovamente* $(X_i, \mathcal{T}_i)$ *spazi topologici non vuoti e* $X = \prod_{i\in I} X_i$. *Indichiamo con* $\mathcal{T}_{\mathrm{BOX}}$ *la Box topology e con* $\mathcal{T}_{\mathrm{PROD}}$ *la topologia prodotto su* X.

xiv. *Mostrare che valgono le seguenti implicazioni:*

$$\begin{aligned}(X,\mathcal{T}_{\mathrm{BOX}}) \text{ Hausdorff} &\iff (X_i,\mathcal{T}_i) \text{ Hausdorff per ogni } i \in I \iff (X,\mathcal{T}_{\mathrm{PROD}}) \text{ Hausdorff};\\ (X,\mathcal{T}_{\mathrm{BOX}}) \text{ compatto} &\implies (X_i,\mathcal{T}_i) \text{ compatto per ogni } i \in I \iff (X,\mathcal{T}_{\mathrm{PROD}}) \text{ compatto};\\ (X,\mathcal{T}_{\mathrm{BOX}}) \text{ connesso} &\implies (X_i,\mathcal{T}_i) \text{ connesso per ogni } i \in I \iff (X,\mathcal{T}_{\mathrm{PROD}}) \text{ connesso};\end{aligned}$$

e osservare che il caso di $X = \prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]$ *(risp.* $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*) considerato sopra fornisce un controesempio all'implicazione*

$(X_i, \mathcal{T}_i)$ *compatto (risp. connesso) per ogni* $i \in I \implies (X, \mathcal{T}_{\mathrm{BOX}})$ *compatto (risp. connesso).*

xv. *Dimostrare che due topologie su un insieme* X *che lo rendano compatto e Hausdorff se confrontabili devono coincidere (notare che se* $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$ *allora* $\mathrm{id}\colon (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T}')$ *è continua; si prenda* $C \subset X$ *chiuso per* $\mathcal{T}\dots$*). Usando il punto precedente si osservi che perciò nel caso in cui* $(X_i, \mathcal{T}_i)$ *sia Hausdorff per ogni* $i \in I$, X *è compatto nella box topology se e solo se questa coincide con la topologia prodotto.*