LEZIONE 9

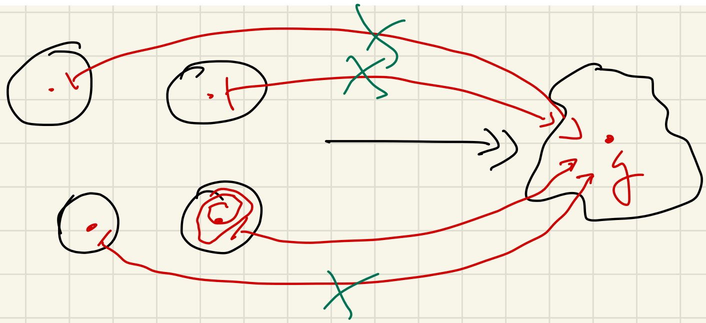
Esercizio 2. Una funzione continua $f : X \to Y$ si dice *propria* se per ogni compatto $K \subseteq Y$ si ha che $f^{-1}(K)$ è compatto in X. Mostrare che se $f : X \to Y$ è continua, X è compatto e Y è T_2, allora f è propria.

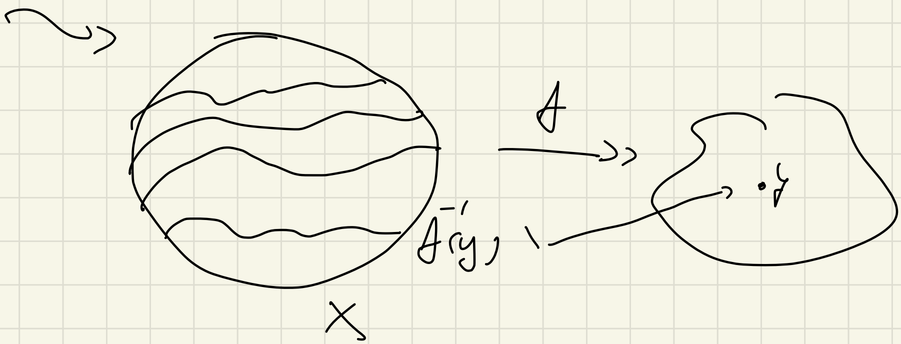
$K \subseteq Y$ compatto $\Rightarrow$ chiuso perché Y è Hausdorff

$f^{-1}(K)$ chiuso
$\cap$
X compatto

$\Rightarrow f^{-1}(K)$ compatto.

Esercizio 5. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva tra due spazi topologici. Supponiamo che Y sia connesso, $f^{-1}(y)$ sia connesso per ogni $y \in Y$ e che f sia aperta. Dimostrare che X è connesso.



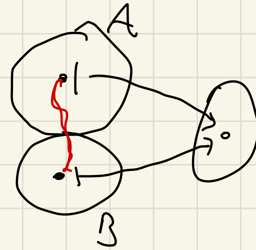


Per assurdo suppongo $X = A \cup B$

A, B aperti e non vuoti, $A \cap B = \emptyset$

$$Y = f(X) = f(A) \cup f(B)$$

$f(A)$: aperto $\neq \emptyset$ $\qquad$ $f(B)$: aperto $\neq \emptyset$



Mostriamo $f(A) \cap f(B) = \emptyset$

supponiamo $\exists y \in f(A), f(B)$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$$
$$f^{-1}(y) \cap B \neq \emptyset$$

$$f^{-1}(y) = \left(f^{-1}(y) \cap A\right) \cup \left(f^{-1}(y) \cap B\right)$$

aperti e disgiunti

entrambi non vuoti

$\rightsquigarrow$ $f^{-1}(y)$ è sconnesso ↯

$\Rightarrow$ $Y = f(A) \cup f(B)$ è una sconnessione di Y ↯

ESEMPIO MATRICI **REALI**

$M_n(\mathbb{R})$
$\cup$ aperto
$GL_n(\mathbb{R})$:

- connesso NO — COMPONENTI CONNESSE?
- compatto NO
- Hausdorff SÌ

$M_n(\mathbb{R})$
$\cup$ chiuso

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tA \cdot A = \mathbb{1} \} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$$

- Connesso NO — COMPONENTI CONNESSE?
- compatto SÌ
- Hausdorff SÌ

$\rightarrow O_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R}) \,\dot{\cup}\, O^-_n(\mathbb{R})$

$M_n(\mathbb{R})$
$\cup$ chiuso

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1 \} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$$

- Connesso SÌ
- compatto NO
- Hausdorff SÌ

<u>Prop</u> $SL_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ connesso per archi

<u>Lemma</u> $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ $= O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$

è connesso per archi

<u>Dim</u>

$A \in SO_n(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \exists M \in O_n(\mathbb{R})$

t.c. $\quad {}^tMAM = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix}$

dove $A_i = \begin{cases} 1 & i > k \\ \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \operatorname{sen}\theta_i \\ -\operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} = R(\theta_i) & 1 \leq i \leq k \end{cases}$

con $k \leq r \leq n$

Costruiamo un cammino in $SO_n(\mathbb{R})$

da A fino alla matrice $\mathbb{1}_n$

Cerchiamo un cammino in $SO_2(\mathbb{R})$

da $R(\theta_i)$ a $\mathbb{1}_2$: $\varphi_i = R(t\theta_i) : [0,1] \to SO_2(\mathbb{R})$

$R(0) = \mathbb{1}_2$, $R(1) = R(\theta_i)$

$$\Phi(t) : [0,1] \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varphi_k(t) & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Cammino da $A' \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R(\theta_k) & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbb{1}_n$

$$M\,\Phi(t)\,({}^tM) : [0,1] \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$$

Cammino $\quad M\,\Phi(0)\,{}^tM = M \cdot {}^tM = \mathbb{1}_n$

$M\,\Phi(1)\,{}^tM = M \cdot A' \cdot {}^tM = A \quad \square$

Perché $SL_n(\mathbb{R})$ è connesso per archi?

$\boxed{\text{Decomposizione polare:}}$ $A \in SL_n(\mathbb{R})$, $\exists R \in SO_n(\mathbb{R})$

e $P \in SL_n(\mathbb{R})$ simmetrica ${}^tP = P$

semi definita positiva: ${}^t u P u \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$

t.c. $A = RP$

Dim ($SL_n(\mathbb{R})$)

φ cammino da $\mathbb{1}_n \to R \in SO_n(\mathbb{R})$
in $SO_n(\mathbb{R})$

$\varphi \cdot P$ cammino da $P \longrightarrow R \cdot P = A$
in $SL_n(\mathbb{R})$

- P connesso da un cammino a $\mathbb{1}_n$
in $SL_n(\mathbb{R})$?

P simmetrica $\rightsquigarrow$ th spettrale dice
che P è ortogonalmente
diagonalizzabile

$$\Rightarrow \exists \; Q \in O_n(\mathbb{R}) \text{ t.c. } Q P \, {}^t Q = \overset{D}{\underset{\shortparallel}{}} \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{pmatrix}$$

$r_i \neq 0$ perché P è invertibile

P semidefinita positiva $\Rightarrow$ ${}^t l_i P l_i = r_i > 0$

$1 \longrightarrow \lambda_i$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1+t(\lambda_1-1) & & \\ & \ddots & \\ & & 1+t(\lambda_n-1) \end{pmatrix}$$

cammino $\underset{\psi(0)}{\overset{\shortparallel}{I_n}} \longrightarrow \underset{\psi(1)}{\overset{\shortparallel}{D}}$ in $GL_n(\mathbb{R})$

$$\frac{\psi(t)}{\sqrt[n]{\det(\psi(t))}} \in SL_n(\mathbb{R})$$

cammino da I_n a D in $SL_n(\mathbb{R})$

$$^tQ \cdot \frac{\psi(t)}{\sqrt[n]{\det(\psi(t))}} \cdot Q : [0,1] \longrightarrow SL_n(\mathbb{R})$$

da I_n a $^tQ B Q = P$. $\square$

$O_n^-(\mathbb{R})$ connesso per archi

<u>Dim</u>

Fisso $C \in O_n^-(\mathbb{R})$

$A \in O_n^-(\mathbb{R}) \ni B$

$A \cdot C, B \cdot C \in SO_n(\mathbb{R})$

$\exists \gamma : AC \longmapsto BC$ cammino in $SO_n(\mathbb{R})$

$\gamma \cdot C^{-1} : A \longmapsto B$ cammino in $O_n^-(\mathbb{R})$

$SL_n(\mathbb{R})$ non è compatto.

<u>Dim</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in SL_n(\mathbb{R})$$

In $\mathbb{R}^{n^2}$ $\|\text{vettore}\|^2 = 2^2 + \frac{1}{2^2} \longrightarrow +\infty$

osservato

ESEMPIO MATRICI COMPLESSE

$M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$

$\cup$ | aperto

$GL_n(\mathbb{C})$:
- connesso Sì
- compatto NO
- Hausdorff Sì

$GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^\times)$

$M_n(\mathbb{C})$

$\cup$ | chiuso

$U_n(\mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) : \underbrace{{}^t\bar{A} \cdot A = \mathbb{1}_n} \} \subseteq GL_n(\mathbb{C})$

- Connesso Sì
- compatto Sì
- Hausdorff Sì

condizione polinomiale in a_{ij} e $\bar{a}_{ij}$

$\rightsquigarrow$ antimmagine tramite una funzione continua di un punto

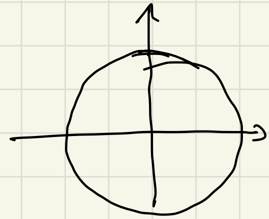
$M_n(\mathbb{C})$

$\cup$ | chiuso

$SL_n(\mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) : \det(A) = 1 \} \subseteq GL_n(\mathbb{C})$

- Connesso Sì
- compatto NO
- Hausdorff Sì

Matrici unitarie $\rightsquigarrow \det A \in S^1$



<u>Prop</u> $U_n(\mathbb{C})$ connesso per archi

<u>Dim</u>

A matrice unitaria $\rightsquigarrow$ th spettrale complesso

$\Rightarrow$ normale

$({}^t\bar{A})A = \mathbb{1}_n = A \cdot ({}^t\bar{A})$

è unitariamente diagonalizzabile

$\Rightarrow \exists\, U \in U_n(\mathbb{R})$ t.c. ${}^t\bar{U} A U = D$ diagonale

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

${}^t\bar{D} \cdot D = \mathbb{1}$

$\Rightarrow |d_j|^2 = \bar{d}_j d_j = 1$

$\Rightarrow d_j = e^{i\theta_j} \quad \exists\, \theta_j \in \mathbb{R}$

$$D(t) = \begin{pmatrix} e^{it\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{it\theta_n} \end{pmatrix}$$ cammino in $U_n(\mathbb{C})$ da $\mathbb{1}_n$ a D.

$$\cap$$
$$U_n(\mathbb{C})$$

poiché

$${}^t\overline{D}(t) \cdot D(t) = \begin{pmatrix} e^{it\theta_1 - it\theta_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n$$

$U \cdot D(t) \cdot {}^t\overline{U}$ cammino in $U_n(\mathbb{C})$

da $\mathbb{1}_n$ a $UD\,{}^t\overline{U} = A$ $\square$

Prop $SL_n(\mathbb{C})$ connesso per archi

Dim

$A \in SL_n(\mathbb{C}) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$

$\exists\, \gamma$ cammino da I_n ad A

in $GL_n(\mathbb{C})$

$\forall\, t \in [0,1]$ $\quad \det \gamma(t) \in \mathbb{C}^\times$

$\gamma = (\gamma_{ij})$ $\qquad \gamma_{ij} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

continue

$\gamma_{ij}(0) = \delta_{ij} \qquad \gamma_{ij}(1) = a_{ij}$

$$\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} (\det\gamma)^{-1}\gamma_{11} & \cdots & (\det\gamma)^{-1}\gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det \tilde{\gamma} = (\det\gamma)^{-1} \det\gamma = 1$$

$$\tilde{\gamma}(0) = (\det \mathbb{1}_n)^{-1} \cdot \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n$$

$$\tilde{\gamma}(1) = (\underset{\overset{\parallel}{1}}{\det A})^{-1} A = A$$

$\tilde{\gamma}$ cammino in $SL_n(\mathbb{C})$
continuo

$\square$