LEZIONE 8

RIASSUNTINO - LEZIONE 8

(1) Def Uno spazio topologico (X, τ) si dice **Hausdorff** (o T_2) se $\forall x \neq y \in X$
$\exists U$ intorno di x, V intorno di y t.c. $U \cap V = \emptyset$

(2) Def Uno spazio topologico si dice **compatto** se
$\forall$ ricoprimento (aperto) $\mathcal{U}$ (cioè $\mathcal{U} = \{V_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ t.c. $\bigcup_{i \in I} V_i = X$)
$\exists$ sotto ricoprimento (aperto) finito (cioè $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ t.c. $\#\mathcal{U}' < +\infty$ e $\bigcup_{V \in \mathcal{U}'} V = X$)

$\Leftrightarrow$ Ogni famiglia di chiusi $\mathcal{C}$ con la PIF ($\bigcap_{\text{finita}} \neq \emptyset$) allora $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$

(3) Def Uno spazio topologico si dice **sconnesso** se $\exists A, B \in \tau \setminus \{\emptyset, X\}$ t.c.
$X = A \cup B$. **Connesso** se non è sconnesso

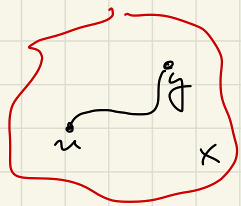
Risultati:

- Sottospazi / prodotti di Hausdorff sono ancora tali
- X Hausdorff $\Rightarrow$ pti chiusi
- Compatti di $\mathbb{R}^n$ sono i chiusi e limitati
- $\begin{cases} Y \subseteq X \text{ chiuso}, \ X \text{ compatto} \Rightarrow Y \text{ compatto} \\ Y \subseteq X \text{ compatto}, \ X \text{ Hausdorff} \Rightarrow Y \text{ chiuso} \end{cases}$
- $f : X \to Y$ continua, X compatto $\Rightarrow f(X)$ compatto
  X connesso $\Rightarrow f(X)$ connesso
- Quozienti di compatti / connessi sono compatti / connessi
- TH (Tychonoff) $\prod_{\text{arbitrario}}$ di compatti è compatto.
- $Y \subseteq X$. Y connesso $\Rightarrow \overline{Y}$ connesso
- $\prod_{\text{arbitrari}}$ connessi è connesso
- $\forall i$ A_i connessi, $\bigcap_i A_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_i A_i$ connesso

Def (X, τ) <u>connesso per archi</u> se

$\forall x, y \in X \quad \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continua

t.c. $\gamma(0) = x, \; \gamma(1) = y.$



X CONNESSO PER ARCHI $\Rightarrow$ CONNESSO

$\cancel{\Leftarrow}$

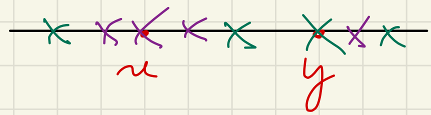
- $\prod$ arbitrario connessi per archi $\Rightarrow$ connesso per archi

- quoziente di connesso per archi è connesso per archi

IN SOSPESO

- Perché topologia di Zariski sull $\mathbb{R}$ non Hausdorff? È T_1? Connesso, ma lo è anche per archi?

$x \in \mathbb{R}$ intorno:



$U_x = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \dots, y_r\}$ $\quad x \neq y_1, \dots, y_r$

$U_y = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_s\}$ $\quad y = x_1, \dots, x_s$

$U_x \cap U_y \neq \emptyset \rightsquigarrow (\mathbb{R}, \tau_{Zar})$ non Hausdorff

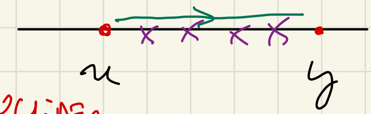
- T_1?

$x \neq y \in \mathbb{R}$ cerchiamo U_x intorno di x t.c. $y \in U_x \rightsquigarrow U_x := \mathbb{R} \setminus \{y\}$

$\rightsquigarrow (\mathbb{R}, \tau_{Zariski})$ è T_1

Connesso per archi? Sì

$x \neq y \in \mathbb{R}$



TOPOLOGIA EUCLIDEA

$$\gamma : I = [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto (1-t)x + ty \quad \in \mathbb{R}[t]$$

γ continua in $(\mathbb{R}, \tau_{\text{Euclidea}})$

$$\gamma^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) = \gamma^{-1}([x,y] \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$$

1° caso $\{x_1, \dots, x_n\} \cap [x,y] = \emptyset$

$$\gamma^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) = [0,1] \quad \text{aperto}$$

2° caso $\{x_1, \dots, x_n\} \cap [x,y] \neq \emptyset$

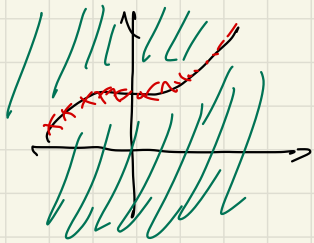
$$\gamma^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) = [0,1] \setminus \{\gamma^{-1}(x_1), \dots, \gamma^{-1}(x_n)\}$$

aperto

Esercizio 1. Siano X e Y due s.t. e $f : X \to Y$ una funzione continua. Definiamo il *grafico di f* come

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subseteq X \times Y$$

dotato della topologia di sottospazio $\Gamma_f \subseteq X \times Y$. Supponiamo che Y sia di Hausdorff. Dimostrare che Γ_f è chiuso.



$(X \times Y) \setminus \Gamma_f \ni \forall (x, y)$

$\Rightarrow y \neq f(x)$

cerchiamo un intorno U di (x, y) t.c.

$U \cap \Gamma_f = \emptyset$.

$\exists V_y$ intorno di y, $V_{f(x)}$ intorno di $f(x)$ t.c.

$V_y \cap V_{f(x)} = \emptyset$

$\exists W$ intorno di x t.c. $f(W) \subseteq V_{f(x)}$

$U = W \times V_y \overset{\text{aperto}}{\subseteq} (X \times Y)$, $(x, y) \in U$

$(W \times V_y) \cap \Gamma_f = \emptyset$ $\Rightarrow (X \times Y) \setminus \Gamma_f$ aperto

Esercizio 2. Trovare uno spazio topologico X in cui la diagonale $\Delta = \{(x,x) | x \in X\} \subseteq X \times X$ non è chiusa.

$id : X \to X \qquad \Delta = \Gamma_{id}$ $\rightsquigarrow$ ci serve almeno uno spazio non Hausdorff.

es. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{Zariski})$

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \Delta$ non è aperto

$\Downarrow$

$(x, y) \qquad x \neq y$

$\cap$ intorno

U aperto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$U \supseteq U_1 \times U_2 \qquad$ U_1 intorno aperto di x

U_2 intorno aperto di y

$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ poiché $\mathbb{R}$ ha la top. di Zariski

$\Downarrow$

z

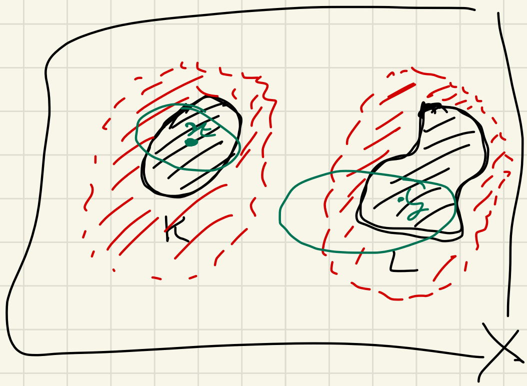
$(z, z) \in U_1 \times U_2 \subseteq U \rightsquigarrow \Delta \cap U \neq \emptyset$

$\cap$

Δ

$\rightsquigarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \Delta$ non è aperto

Esercizio 5. Sia X uno spazio di Hausdorff e siano K ed L due sottoinsiemi compatti e disgiunti di X (quindi $K \cap L = \emptyset$). Dimostrare che esistono due aperti disgiunti U e V di X tali che $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.



$\forall x \in K \quad \forall y \in L$

$\exists\ U_y^x$ intorni di x

V_y^x intorni di y

t.c. $U_y^x \cap V_y^x = \emptyset$

Fisso $x \in K$, $\{V_y^x\}_{y \in L}$ è un ricoprimento di L

$\rightsquigarrow \exists\ y_1, \dots, y_\ell \,/\, \{V_{y_1}^x, \dots, V_{y_\ell}^x\}$ sottoric finito di L

$L \subseteq V_x = \bigcup_{i=1}^{\ell} V_{y_i}^x$ è aperto

Considerare $U_x = \bigcap_{i=1}^{\ell} U_{y_i}^x$ è aperto intorno di x

$U_x \cap V_x = \emptyset$

$\{U_x\}_{x \in X}$ ricoprimento di K

$\rightsquigarrow \exists\, x_1, \dots, x_k \;/\; \{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$

sotto ric. - finito

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} \qquad\qquad V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{x_i} \supseteq L$$

$U \supseteq K$

aperto $\qquad\qquad$ aperto

$U \cap V = \emptyset$ perché $z \in V$

$z \in V_{x_i} \quad \forall\, i = 1, \dots, k$

$\Rightarrow z \notin U_{x_i} \quad \forall\, i = 1, \dots, k$

$\Rightarrow z \in U$ $\#$

$\square$

ESEMPIO MATRICI

$M_n(\mathbb{R})$
$\cup\!\!|$ aperto
$GL_n(\mathbb{R})$: $\begin{cases} \text{connesso} & \text{NO} \\ \text{compatto} & \text{NO} \\ \text{Hausdorff} & \text{SÌ} \end{cases}$

COMPONENTI CONNESSE?

$M_n(\mathbb{R})$
$\cup\!\!|$ chiuso

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tA \cdot A = \mathbb{1} \} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$$

$\begin{cases} \text{Connesso} & \text{NO} \\ \text{compatto} & \text{SÌ} \\ \text{Hausdorff} & \text{SÌ} \end{cases}$

COMPONENTI CONNESSE?

$M_n(\mathbb{R})$
$\cup\!\!|$ chiuso

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1 \} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$$

$\begin{cases} \text{Connesso} & ? \\ \text{compatto} & ? \\ \text{Hausdorff} & \text{SÌ} \end{cases}$

$SL_n(\mathbb{R})$ è limitato?

e.g. $SL_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad ad - bc = 1$

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad = 1$$

$$\rightsquigarrow d = a^{-1}$$

$|a| \to +\infty$

$|d| \to 0$

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ a^{-1} \end{pmatrix} \right\|^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \xrightarrow{|a| \to +\infty} +\infty$$

$\rightsquigarrow$ $SL_2(\mathbb{R})$ non è limitato $\subseteq \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & a^{-1} & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left\| \begin{pmatrix} a \\ a^{-1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Big\downarrow |a| \to +\infty$$

$$+\infty$$

$\rightsquigarrow$ $SL_n(\mathbb{R})$ non è limitato per $n \geq 2$ $\rightsquigarrow$ no compatto

$n=1 \qquad SL_1(\mathbb{R}) = \{1\}$

$n \geq 2$

per vedere la connessione per archi dobbiamo dimostrare che $\exists\, \gamma : [0,1] \to SL_n(\mathbb{R})$ continua t.c.

$$\gamma(0) = \mathbb{1}_n$$

$$\gamma(1) = A \in SL_n(\mathbb{R})$$

per ogni $A \in SL_n(\mathbb{R})$