

May 3, 2022

ESERCIZI GEOMETRIA 2 PARTE B SETTIMANA 9 – VARIETÀ DIFFERENZIABILE

Esercizio 1. Dimostrare che $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ è una varietà differenziabile di dimensione n immersa in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Esercizio 2 (Grassmanniane). Fissiamo due interi r ed N con $0 \leq r \leq N$. La *Grassmanniana degli r -sottospazi di $\mathbb{R}^N$* è l'insieme

$$G_{r,N} = \{V \subseteq \mathbb{R}^N \text{ sottospazio vettoriale di dimensione } \dim(V) = r\}.$$

Dimostrare che $G_{r,N}$ è una varietà differenziale di $\mathbb{R}^{Nr}$ di dimensione $r(N-r)$.

Traccia dello svolgimento. Se V è un sottospazio di dimensione r di $\mathbb{R}^N$, denoto con $[V]$ l'elemento corrispondente in $G_{r,N}$. Fissato $[V]$, sia $v_1, \dots, v_r$ una $\mathbb{R}$ -base di V . Scrivo

$$v_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,N})$$

per $i = 1, \dots, r$ e definisco la matrice

$$A_{[V]} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,N} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{r,1} & \dots & x_{r,N} \end{pmatrix}.$$

Se $M \in M_{r \times N}(\mathbb{R})$ e $M' \in M_{r \times N}(\mathbb{R})$ sono due matrici con r righe ed N colonne, entrambe di rango massimo r , dico che M ed M' sono *equivalenti* se esiste $A \in GL_r(\mathbb{R})$ tale che $M' = A \cdot M$; definisco inoltre l'insieme delle classi di equivalenza modulo la relazione così definita:

$$\mathcal{M} = \{\text{matrici } A \text{ con } r \text{ righe ed } N \text{ colonne di rango } r\} / \sim.$$

Infine, fissati r indici distinti $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq N$, sia $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, N\}$ e per $M \in M_{r \times N}(\mathbb{R})$, definisco M_I come la matrice formata dalle colonne $i_1, \dots, i_r$ di M .

(1) Dimostrare che la funzione $[V] \mapsto A_{[V]}$ definisce una biezione (di insiemi) tra $G_{r,N}$ e $\mathcal{M}$.

(2) Posto $U_I = \{M \in M_{r \times N}(\mathbb{R}) | \det(M_I) \neq 0\}$, mostrare che

$$\bigcup_I U_I = \{M \in M_{r \times N}(\mathbb{R}) | \text{rango di } M \text{ è massimo}\},$$

dove l'unione è su tutti i sottoinsiemi $I \subseteq \{1, \dots, N\}$ formati da r elementi distinti.

(3) Mostrare che U_I è un aperto saturo rispetto alla proiezione

$$\bigcup_I U_I \longrightarrow G_{r,N}$$

ottenuta componendo l'uguaglianza nel punto (2), la proiezione canonica

$$\{M \in M_{r \times N}(\mathbb{R}) | \text{rango di } M \text{ è massimo}\} \longrightarrow \mathcal{M}$$

e l'inversa della mappa $[V] \mapsto A_{[V]}$.

(4) Mostrare che per ogni I , ogni $M \in U_I$ ha un rappresentante N tale che $N_I = \text{Id}_{r \times r}$, dove $\text{Id}_{r \times r}$ è la matrice identità $r \times r$. Concludere che i punti di $G_{r,N}$ che sono immagini di matrici di U_I corrispondono biettivamente a matrici $N \in U_I$ tali che $N_I = \text{Id}_{r \times r}$. Dedurre da questo che le restanti $N-r$ colonne del rappresentante N (dunque, i restanti $r(N-r)$ elementi) possono essere usate per definire una parametrizzazione

$$\varphi_I : U_I \longrightarrow G_I \subseteq G_{r,N}.$$

(5) Concludere che $G_{r,N}$ è una varietà differenziale di $\mathbb{R}^{Nr}$ di dimensione $r(N-r)$.