

LEZIONE 7

26/04/22



RIASSUNTINO - LEZIONI 7

(1) Def Uno spazio topologico (X, τ) si dice

Hausdorff (σT_2) se $\forall x \neq y \in X$

$\exists U$ intorno di x , V intorno di y t.c. $U \cap V = \emptyset$

(2) Def Uno spazio topologico si dice compatto se

$\forall$ ricoprimento $\mathcal{U}$ (cioè $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ t.c. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$)

$\exists$ sotto ricoprimento finito (cioè $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ t.c. $\bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U = X$)

$\Leftrightarrow$ Ogni famiglia di chiusi con la
P.I.F. ($\bigcap_{finita} \neq \emptyset$) allora $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$

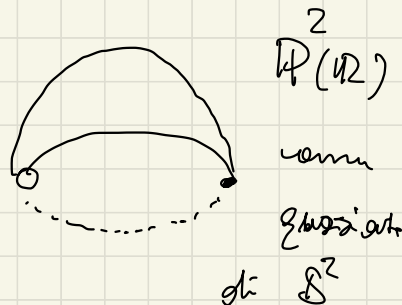
(3) Def Uno spazio topologico si dice
scannesso se $\exists A, B \in \tau \setminus \{\emptyset, X\}$ t.c.

$X = A \cup B$. Connesso se non è scannesso

Risultati:

- Se h è per / predelti di Hausdorff sono ancora tali
- X Hausdorff $\Rightarrow$ p chiuso
- Compatti di $\mathbb{R}^n$ sono i chiusi e limitati
- $\left\{ \begin{array}{l} Y \subseteq X \text{ chiuso, } X \text{ compatto} \Rightarrow Y \text{ compatto} \\ Y \subseteq X \text{ compatto, } X \text{ Hausdorff} \Rightarrow Y \text{ chiuso} \end{array} \right.$
- $f: X \rightarrow Y$, X compatto $\Rightarrow f(X)$ compatto
Continua X connesso $\Rightarrow f(X)$ connesso
- Quozienti di compatti / connessi
sono compatti / connessi
- $\overline{TL}(T \text{ y chomo } \mathbb{R}) \prod_{\text{orbitario}} \text{di compatti} \text{ è compatto}$
- $Y \subseteq X$. Y connesso $\Rightarrow \overline{Y}$ connesso
- $\prod_{\text{orbitario}} \text{connessi} \text{ è connesso}$
- $\forall i \ A_i \text{ connessi, } \bigcap_i A_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_i A_i \text{ connesso}$

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : \begin{cases} \text{Connesso} & \checkmark \\ \text{Compatto} & \checkmark \\ \text{Hausdorff} & \checkmark \end{cases}$$



$$p: S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

continue

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = p(S^n) \Rightarrow \text{connesso e senza} \\ \text{punti} \quad \text{continue} \quad \text{connesso} \quad \text{volte}$$

$$S^n = \{ u \in \mathbb{R}^{n+1} : \|u\| = 1 \}$$

limitato

$$= \{ u \in \mathbb{R}^{n+1} : u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{n+1}^2 - 1 = 0 \}$$

$$= f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow \text{chiuso}$$

continue $\rightarrow$ f $\rightarrow$ $\{0\}$ $\rightarrow$ $\text{pti in } \mathbb{R} \text{ sono chiusi}$

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{n+1}^2 - 1$$

$\bigcap_{\epsilon > 0} [-\epsilon, \epsilon] = \{0\}$

S^n chiuso e limitato in $\mathbb{R}^{n+1}$

$\Rightarrow$ compatto $\Rightarrow \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$

compatto

$$\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / \sim$$

Hausdorff
 $\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$\Rightarrow$ Hausdorff

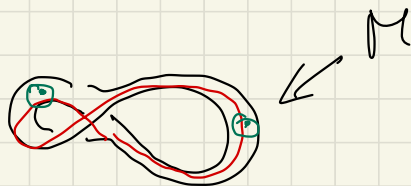
$\uparrow$
piccolo ragionamento
come solito



Notte di Möbius

Connesso ✓
 Compatto ✓
 Hausdorff ✓

$$[0,1] \times [0,1]$$



Connesso $\subseteq \mathbb{R}^2$ Connesso

Compatto (chiuso e limitato)

Hausdorff

mostro di
 $\Rightarrow$ Möbius

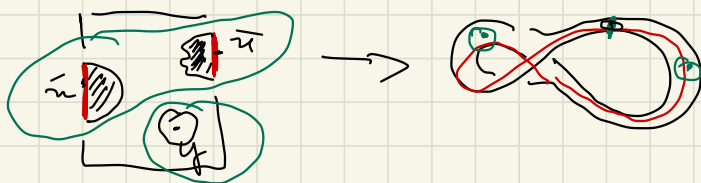
connesso
 compatto

• se prendo $x \neq y \in (0,1) \times (0,1)$
 e vedo $\bar{x}, \bar{y}$ le immagini in M
 e posso trovare due intorni
 disgiunti che restano disgiunti
 in M

• Se $x \in (0,1) \times \{1\}$ e $y \in (0,1) \times (0,1)$
 come sopra

- Se $u \in (0,1) \times \{1\}$ e $y \in (0,1) \times \{0\}$
- Se $u \in \{0\} \times [0,1]$ e $y \in (0,1) \times (0,1)$

Un intorno di u è l'immagine
di un ^{intorno} aperto ~~chiuso~~ di u



$\hookrightarrow$ questi mi danno
2 intorni disgiunti

- analoghi gli altri casi - ..

$GL_n(\mathbb{R})$: $\begin{cases} \text{non } \bar{\epsilon} \text{ connexo} \checkmark \\ \text{non } i \text{ compacto} \checkmark \\ \text{Hausdorff} \checkmark \end{cases} \rightarrow \begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \\ \text{compacto} \\ {}^t A A = I_n \end{cases}$

$\det : GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong \mathbb{R}^{n^2}} \mathbb{R}$ continue
 $\cup$
 $GL_n(\mathbb{R})$

Se $GL_n(\mathbb{R})$ fosse connexo

$\Rightarrow \det(GL_n(\mathbb{R}))$ connexo

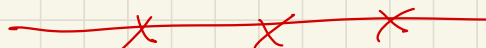
$\det \begin{pmatrix} \sqrt{n} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{n} \end{pmatrix} I_n = n$

$\cap (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

non connexo

portanto $GL_n(\mathbb{R})$ non é connexo

$$(\mathbb{R}, \tau_{\text{Forsyth}}) : \begin{cases} \text{con nerro} \checkmark \\ \text{Compatto} ? \\ \text{non Hausdorff} ? \end{cases}$$

 $\leadsto$ aperti di Forsyth

$$\mathbb{R} = A \cup B$$

$\nwarrow$ $\nearrow$
 aperti

supponiamo per
contraddizione che debba

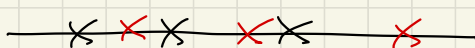
$$A \cap B = \emptyset$$

$$A, B \neq \emptyset$$

$$A = \mathbb{R} - \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$B = \mathbb{R} - \{y_1, \dots, y_m\}$$

$$A \cap B = \mathbb{R} - \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} \neq \emptyset$$



$\uparrow$
 al max n+m

$$\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{Forsyth}}) \text{ con nerro}$$

(12, 16 date delle boe fatte
degli interessi [a, b]) :

men $\bar{i}$
con messo
men $\bar{i}$ compota
 $\bar{i}$ flourschiff

BOX TOPOLOGY, compattezza e

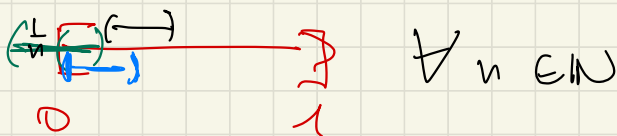
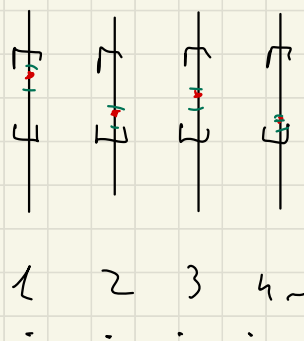
connessione e separazione

(1) Mostro che $\prod_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]$ non è

compatto per la box topology

(mentre lo è per la topologia prodotta)

$\mathcal{U} = \{$



$$U_i^n = \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right) \quad i = 0, \dots, n$$

$$\vec{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n, \dots) \in \prod_{n \geq 1} \{0, \dots, n\}$$

$$U = \bigcup_{j_1}^1 \times \bigcup_{j_2}^2 \times \bigcup_{j_3}^3 \times \dots$$

è aperto nella box topology

$$\text{di } \prod_{n \geq 1} [0, 1]$$

$$U = \left\{ U_J \right\}_{J \in \prod_{n \geq 1} \{0, \dots, n\}}$$

Condizioni numerabili $\aleph_0$

$$\leadsto \text{è io solo } J_0 \in \prod_{n \geq 1} \{0, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \text{la successione } \left(\frac{j_n}{n} \right)_{n \geq 1} \text{ non}$$

appartiene più le restano degli

$$U_J, J \neq J_0$$

$$((x))$$

$$j_{n-1} \leq j_n \leq j_{n+1}$$



$$U_J \leadsto J \neq J_0$$

$\exists n$ t.c.

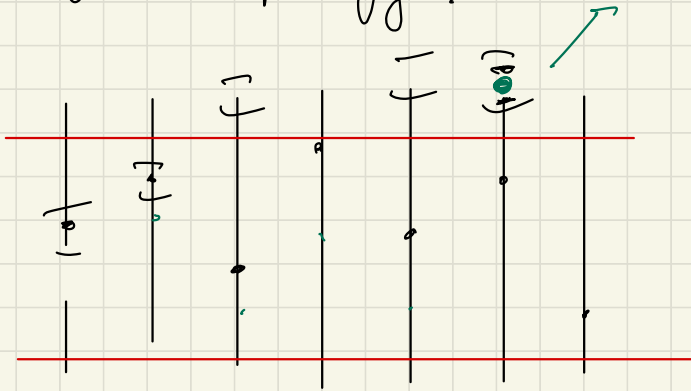
$$j_n \neq (j)_n$$

$\Rightarrow$ U non am mette sotto ric.
finito.

(2) Mostriamo che $A = \{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_n \text{ ^{successione} limitata} \}$

$B = \{ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_n \text{ ^{successione} illimitata} \}$

formano una disconnessione di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nella box topology.



$$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \quad \checkmark$$

$$u_{n+1}$$

A è aperto.

$$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$$

$$U_n = (u_n - 1, u_n + 1)$$

$$U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ aperto}$$

U intorno di z , $U \subseteq A$:

infatti $(y_n)_n \in U$, $|y_n| < |z_n| + 1 < M + 1$
 $\wedge$
 $\exists M \gg 0$

$\leadsto A$ è aperto

$z \in B$ U sfera di raggio

$$|z_n| - 1 < |y_n| < |z_n| + 1$$

$\exists$ (sotto successione di $|z_n|$) $\rightarrow +\infty$

$\Rightarrow \exists$ (sotto successione di $|y_n|$) $\rightarrow +\infty$

$\Rightarrow (y_n) \in B$

$\leadsto B$ è aperto

(3) Metriken $(\mathbb{R}^N, \rho_{\text{Box}})$ Hausdorff (?)