

LEZIONE 6

12/04/22



Esercizio 5. Mostrare che se (X_1, d_1) e (X_2, d_2) sono due spazi metrici, allora (X, d) con $X = X_1 \times X_2$ e

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$$

è uno spazio metrico. Perché se definissi la distanza tramite il minimo al posto del massimo, ovvero come la funzione

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \min\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$$

non otterrei (in generale) uno spazio metrico?

Questa metrica mi dà la topologia $\prod$.

- $d \geq 0$ ✓ perché d_1, d_2
- simmetria $d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$

$\leadsto$ viene dalla simmetria di d_1 e d_2

• dis. Δ :

$$\begin{aligned} d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= \max\left\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\right\} \\ &\leq \max\left\{d_1(x_1, x_3) + d_1(x_3, x_2), d_2(y_1, y_3) + d_2(y_3, y_2)\right\} \\ &\leq \max\left\{d_1(x_1, x_3), d_2(y_1, y_3)\right\} + \\ &\quad + \max\left\{d_1(x_3, x_2), d_2(y_3, y_2)\right\} \end{aligned}$$

$$= d\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_3 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} u_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= d\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$= \max \left\{ d_1(u_1, u_2), d_2(y_1, y_2) \right\}$$

$$\Rightarrow d_1(u_1, u_2) = d_2(y_1, y_2) = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2, \quad y_1 = y_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

#

$$D_d\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, R\right) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} : \begin{array}{l} d(u, u_0) < R \\ d(y, y_0) < R \end{array} \right\}$$

$$\stackrel{\cap}{\times} = D_{d_1}(u_0, R) \times D_{d_2}(y_0, R)$$

Vi cercherò se prendiamo un aperto U nella
topologia prodotto, che contiene un certo

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in X \quad U \supseteq D_{d_1}(x_0, r_1) \times D_{d_2}(y_0, r_2)$$

$$\supseteq D_{d_1}(x_0, r) \times D_{d_2}(y_0, r)$$

$r = \min\{r_1, r_2\}$ $\parallel$

$$D_d\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, r\right)$$

→ Pertanto topologia $\parallel$ e la
topologia indotta da d coincidono
Quindi (X, r_π) è spazio
metrico

Un'insieme di misure infinite?

$(x_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Spazi metrici

$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ è ancora spazio metrico?
la topologia prodotto è metrizzabile?

- TH1 Supponiamo che $\forall i \ 0 < d_i < 1$.

Allora la metrica su $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$

$$d\left(\underbrace{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}}_x, \underbrace{(y_i)_{i \in \mathbb{N}}}_y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}$$

induce la topologia prodotto su X .

Dim

CONVENIENZA: $\forall i \ d_i < 1 \Rightarrow d(x, y) \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}$

$d \geq 0 \checkmark$ simmetria $\checkmark$

$< +\infty$

dis $\Delta \rightsquigarrow$ convergenza assoluta ✓

$$d=0 \Rightarrow u=y \quad \checkmark$$

(1) preso un intorno di base di u nella topologia $\mathcal{B}_d$, questo contiene un intorno di base di u nella top. $\mathcal{B}_\pi$

$$D_d(u, R) = \left\{ y \in X : \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i(u_i, y_i)}{2^i} < R \right\}$$

Consideriamo $U = \prod_{i=0}^N D_{d_i}(u_i, R_i) \times \prod_{i=N+1}^{\infty} X_i$

t.c. $U \subseteq D_d(u, R)$

$$\begin{aligned} y \in U \quad d(u, y) &< \sum_{i=0}^N 2^{-i} d_i(u_i, y_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{-i} \\ &\leq \sum_{i=0}^N d_i(u_i, y_i) + 2^{-N} \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} 2^i \right) < \end{aligned}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1}$

F_i siamo N t.c. $2^{-N} < R/2$

F_i siamo R_i t.c. $R_i = \frac{R}{2(N+1)}$

$$\leq \cancel{(N+1)} \frac{R}{\cancel{2(N+1)}} + \frac{R}{2} = R$$

(2) preso un intorno di base di $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nella topologia $\mathcal{T}_\pi$, questo contiene un intorno di base di u nella top. $\mathcal{T}_d$

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet U_i \text{ aperta di } X_i \\ \text{per } i \leq N \\ \bullet \forall i > N \quad U_i = X_i \end{array} \right.$$

$$i \leq N$$

$$u_i \in U_j \text{ aperta in } \mathcal{T}_{d_i} \Rightarrow \exists D(u_i, R_i) \subseteq U_i$$

$$\text{Per chiama } R \text{ b.c. } D(u, R) \subseteq U$$

$$y \in D(u, R) \Rightarrow d(u, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i(u_i, y_i)}{2^i} < R$$

$$\Rightarrow \forall i \leq N \quad d_i(u_i, y_i) < 2^i R < \cancel{2^i} 2^i R_i = 2^i R_i$$

↑
vogliamo

$$R = \min_{i \leq N} \{ 2^{-i} R_i \}$$

- 05 Ogni metro è topologicamente
equivalente ad una limitate

$$d \leadsto 0 \leq \frac{d}{1+d} < 1$$

In particolare se prendo $\frac{d_i}{1+d_i}$
nel teorema precedente il posto delle d_i
non mi serve la limitatezza.

GRUPPI TOPOLOGICI

L'altra volta:

- Def Un gruppo topologico è un gruppo $(G, \cdot)$ dotato di una topologia $\mathcal{T}_G$ tale che le funzioni

$$\begin{aligned} (G \times G, \mathcal{T}_{\text{prod.}}) &\xrightarrow{\quad \cdot \quad} (G, \mathcal{T}_G) \\ (u, v) &\longmapsto uv^{-1} \end{aligned}$$

sia continue.

- Prop $(G, \cdot, \mathcal{T}_G)$ gruppo topologico.
Sse le funzioni

$$\begin{aligned} m: G \times G &\longrightarrow G & \text{e} & \quad i: G \longrightarrow G \\ (u, v) &\longmapsto uv & & \quad u \longmapsto u^{-1} \end{aligned}$$

sono continue.

- Prop Traslationi ℓ_a, ℓ_e , coniugato η_a , i
sono isomorfismi e sono omomorfismi.

- Coro Harris G gruppo topologico

U aperto, $e \in G \Rightarrow eU, Ue, U^{-1}$ aperti

C chiuso, $e \in G \Rightarrow eC, Ce, C^{-1}$ chiusi

Dim

Viene dal fatto che $eU = \downarrow_e(U)$ etc...

$$eC = \downarrow_e(C) \quad \square$$

- Corollario La topologia su un gruppo topologico G è definita dal filtro degli intorni aperti di e_G .

Dim

Se $U \neq \emptyset$ aperto $\Rightarrow \exists e \in U$ e $\underbrace{e^{-1}U}_{\downarrow e} = U$ aperto
 $e^{-1}e = e_G$

$\rightarrow e^{-1}U$ intorno aperto di e_G $\square$

- Prop Se $\mathcal{F}_e$ è il filtro degli intorni aperti di e_G allora:

$$(1) \quad \forall U \in \mathcal{F} \quad \exists V \in \mathcal{F} \text{ t.c. } V \cdot V \subseteq U$$

(Continuità moltiplicazione in $(\mathcal{L}_G, \mathcal{L}_G)$)

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(\mathcal{L}_G, \mathcal{L}_G) \mapsto \mathcal{L}_G$$

$$(2) \quad \forall U \in \mathcal{F} \quad \exists V \in \mathcal{F} \text{ t.c. } V^{-1} \subseteq U$$

$$(3) \quad \forall U \in \mathcal{F}, \forall g \in G \quad \exists V \in \mathcal{F} \text{ t.c. } gVg^{-1} \subseteq U$$

$$(4) \quad \forall U \in \mathcal{F} \quad \forall u \in U \quad \exists V \in \mathcal{F} \text{ t.c. } Vu \subseteq U$$

$\leadsto$ Se $\mathcal{F}$ (base di) un filtro tale
che si abbia (1) - (4)

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ è il filtro degli intorni
aperti di una topologia su G
che rende G gruppo topologico

- Def (X, τ) spazio topologico si dice omogeneo se $\forall x, y \in X \quad \exists \varphi: X \rightarrow X$ omeomorfismo t.c. $\varphi(x) = y$

- Es G , gruppo topologico $\bar{e}$ omogeneo:
 $\forall x, y \in G \quad \varphi = \lambda_{y\bar{e}^{-1}}$, omeom.

$$\varphi(x) = y\bar{e}^{-1}x = y$$

- Prop $f: G \rightarrow H$ tra gruppi topologici
 f omeomorfismo.

f $\bar{e}$ continua $\Leftrightarrow f$ $\bar{e}$ continua in e

Dim

Sia $x \in G \quad \forall U$ intorno di $f(x)$ in H

$(f(x))^{-1}U$ intorno di $e_H = f(e_G)$

$\Rightarrow \exists V$ intorno di e_G t.c. $f(V) \subseteq (f(x))^{-1}U$

$$\Rightarrow f(uV) = f(u)f(V) \in \cancel{f(u)} \cdot \cancel{f(V)} \quad u = u_{\Pi}$$

- Sottogruppi: $H \leq G$, (G, τ_G) gruppo top.

$$\leadsto (H, \tau_{G|H}) \text{ è gruppo topologico}$$

$$m: \begin{array}{ccc} G & \times & G \\ \cup & & \cup \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} G \\ \cup \end{array}$$

$$m|_H: H \times H \longrightarrow H$$

- Quozienti: $N \trianglelefteq G$, (G, τ_G) gruppo top.

$$(G/N, \tau_{\text{quoziente}}) \text{ è gruppo topologico}$$

$$\bullet \quad p: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/N \\ \cup & & \\ \cup & \text{aperto} & \end{array} \quad \text{è mappa aperta}$$

$$p(U) = \{ uN : u \in U \}$$

Finitimo prossima volta.

