

RIASSUNTINO : LEZIONE 5

- $\underline{\text{Def}} \ (X, \tau_X) \xrightarrow{f} Y$, la topologia quoziente su Y rispetto ad f è (topologia forte / finale)

$$f_*(\tau_X) = \{ U \subseteq Y : f^{-1}(U) \in \tau_X \}$$

È la topologia più fine su Y per cui f è continua.

- Def Sia $p : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ è continua e suriettiva. Si dice identificazione se (Y, τ_Y) ha la topologia quoziente rispetto a p .

- Prop $p : X \rightarrow Y$ identificazione. Allora

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subseteq X \text{ aperta} \\ \text{chiusa} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} B \subseteq Y \\ \text{aperta} \end{array} \right\}$$

$$(\phi^{-1}(p(A)) = A)$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & p(A) \\ p^{-1}(B) & \xleftarrow{\quad} & B \end{array}$$

- Prop Sia $p: X \rightarrow Y$ continua & suriettiva

p identificazione $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X$ aperto saturo
 $p(A)$ aperto in Y

- Corollario Sia $p: X \rightarrow Y$ continua & suriettiva.

Allora p aperto $\Rightarrow p$ identificazione

- ρ equivalenza su $(X, \tau_X) \Rightarrow X/\rho = \{[x]_\rho : x \in X\}$

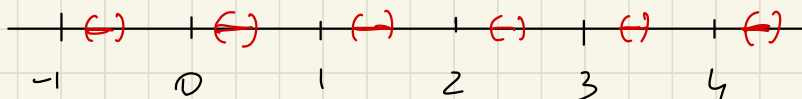
$p: X \twoheadrightarrow X/\rho$ induce topologia su X/ρ
quoziente

Aperti saturi $\equiv$ aperti tali che $\forall u \in A$
 $[u]_\rho \subseteq A$

(es) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$

equivalenza

$u \sim v \Leftrightarrow u - v \in \mathbb{Z}$



- L'esempio di X/ρ non è restrittivo!

Prop Sia $p: X \rightarrow Y$ identificazione, dove

ρ_p definito da $u \rho_p y \Leftrightarrow p(u) = p(y)$

è l'equivalenza e $Y \cong (X/\rho_p, \text{top } q \text{ quotiente della proiezione})$

- Prop Se $p: X \rightarrow Y$ identificazione, (Z, τ_Z)

$g: Y \rightarrow Z$ continuo $\Leftrightarrow g \circ p$ continuo

- Cor ρ relazione di equivalenza su (X, τ_X)

$$\left\{ \begin{array}{l} g: X/\rho \rightarrow Z \\ \text{continua} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} G: X \rightarrow Z \\ \text{continua} \\ + \\ \text{compatibili con } \rho \end{array} \right\}$$

↑
ovvero G costante su $[u]_\rho$

$$g \longmapsto g \circ p$$