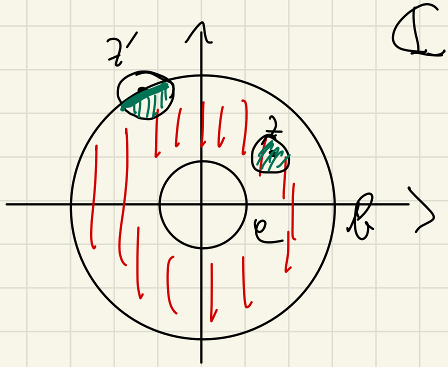
LEZIONE 5

05/04/22

Esercizio 4. Fissiamo due numeri reali $0 < a < b$ e definiamo la *corona circolare*

$$C_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} | a \leq |z| \leq b\}.$$

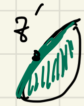
Mostrare che $C_{a,b}$ è omeomorfa a $\mathbb{I} \times \mathbb{S}^1$ (dove $\mathbb{I} = [0,1]$ e $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.



$\mathbb{C}$

gli intorni di un pto $z \in \mathrm{Int}(C_{a,b})$ sono $D(z, r)$ r piccolo abbastanza

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)}$$

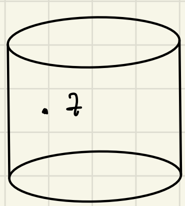
gli intorni di un pto z' di frontiera (esterna) sono $D(z', r) \cap C_{a,b} =$ 

non sono aperti in $\mathbb{C}$!

$$(t, e^{i\theta})$$

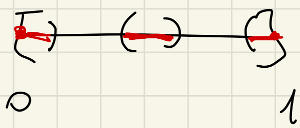
$$[0,1] \times S^1$$

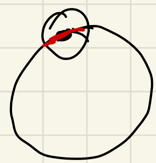
topologia prodotto

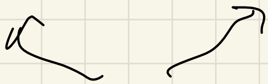


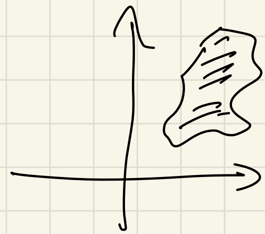
$$S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \|v\| = 1\}$$

Come sono fatti gli aperti









una base degli aperti

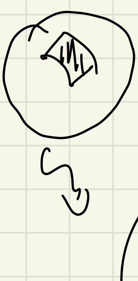
è fatta da Π aperti (di base)

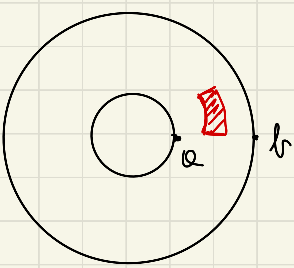
$$[0,1]$$
$$U_1$$

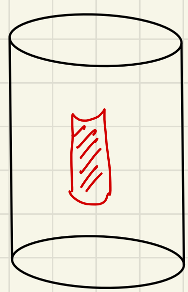
1° tipo $\longrightarrow$ $(a,b) \times \{ e^{i\vartheta} : \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2 \}$

2° tipo $\longrightarrow$ $[0,b) \times \{ e^{i\vartheta} : \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2 \}$

$(a,1] \times \{ e^{i\vartheta} : \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2 \}$







$a \leq |z| \leq b$

$$z = |z| e^{i\,Arg(z)} \xmapsto{\varphi} \left(\frac{\|z\| - a}{b-a}, e^{i\,Arg(z)} \right)$$

$$0 \leq Arg(z) < 2\pi$$

$$\left(a + t(b-a) \right) e^{i\theta} \xleftarrow{\chi} \left(t, e^{i\theta} \right)$$

$\rightsquigarrow$ φ è una biezione con inversa χ.

$$\varphi : C_{a,b} \longrightarrow [0,1] \times S^1$$

è continua?

Proprietà universale della topologia prodotto

$$Z \xrightarrow{\varphi} X_1 \times X_2 \xrightarrow[p_i]{} X_i$$

quindi per vedere se $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ è continua basta dire che

$$C_{a,b} \xrightarrow{\varphi_1} [0,1]$$
$$z \longmapsto \frac{\|z\| - a}{b-a}$$

è continua ($\| \ \|$ è continua) ✓

e $C_{a,b} \xrightarrow{\ \varphi_2\ } S^1$ è continua

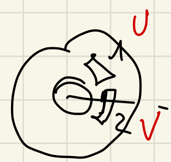
$$z \longmapsto \frac{z}{|z|}$$

Vediamo che Ψ è continua

$$\Psi : [0,1] \times S^1 \longrightarrow C_{a,b}$$

Prendiamo aperti di base della corona circolare e vediamo che sono aperti del cilindro

Semplifichiamo scegliendo una base un po' più comoda di $C_{a,b}$

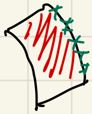


$$U^{\theta_1 \theta_2}_{c,d} = \left\{ z : \begin{array}{l} c < |z| < d \\ \theta_1 < Arg(z) < \theta_2 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a < c < d < b \\ 0 \le \theta_1 < \theta_2 < 2\pi \end{array}}$$

$$V^{\theta_1 \theta_2}_{c,d} = \left\{ z : \begin{array}{l} c < |z| < d \\ 0 \le Arg(z) < \theta_1 \ \text{oppure} \ \theta_2 < Arg(z) < 2\pi \end{array} \right\}$$

$U^{\theta_1\theta_2}_{c,b}$



$a < c < b$

$0 \le \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$

$$\tilde{U}^{\theta_1\theta_2}_{c,b} = \left\{ z \;:\; \begin{array}{l} c < |z| \le b \\ \theta_1 < \mathrm{Arg}(z) < \theta_2 \end{array} \right\}$$

$$\tilde{V}^{\theta_1\theta_2}_{c,b} = \left\{ z \;:\; \begin{array}{l} c < |z| \le b \\ 0 \le \mathrm{Arg}(z) < \theta_1 \text{ oppure } \theta_2 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi \end{array} \right\}$$

$$\tilde{U}^{\theta_1,\theta_2}_{a,d} = \left\{ z \;:\; \begin{array}{l} a \le |z| < d \\ \theta_1 < \mathrm{Arg}(z) < \theta_2 \end{array} \right\}$$

$$\tilde{V}^{\theta_1,\theta_2}_{a,d} = \left\{ z \;:\; \begin{array}{l} a \le |z| < d \\ 0 \le \mathrm{Arg}(z) < \theta_1 \text{ oppure } \theta_2 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi \end{array} \right\}$$

$$\psi^{-1}\left(U^{\theta_1\theta_2}_{c,d} \right) = \left(\frac{c-a}{b-a}, \frac{d-a}{b-a} \right) \times \left\{ e^{i\theta} : \theta_1 < \theta < \theta_2 \right\}$$

$$\psi^{-1}\left(\tilde{U}^{\theta_1\theta_2}_{c,b} \right) = \left(\frac{c-a}{b-a}, 1 \right] \times \left\{ e^{i\theta} : \theta_1 < \theta < \theta_2 \right\}$$

$$\psi(\ldots \ldots)$$

Esercizio 6. Fisso un intero $n \geq 1$. Dimostrare che $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, dove $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è l'insieme degli elementi di norma 1. Come si scrive e come si interpreta il risultato per $n = 0$?

Come sopra. $\quad \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_{>0}$

$$v \longmapsto \left(\frac{v}{\|v\|}, \|v\| \right)$$

per mostrare omeomorfismo ragiono come sopra (però è più facile)

$$\mathbb{R} \underset{\log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}_{>0} \quad , \quad \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{(p_1, \log(p_2))} \cong \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$$

Osservo che questo mi interpreta $\quad \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{R}^\times} = \frac{\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_{>0}}{\mathbb{R}^\times} = \mathbb{S}^n / \underset{\text{antipodal}}{\sim}$

$$r \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r v_0 \\ \vdots \\ r v_n \end{pmatrix} \qquad r \cdot \left(\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \lambda \right) = \left(\begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(r) v_0 \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(r) v_n \end{pmatrix}, \lambda |r| \right)$$

Esercizio 2. Sia $n \geq 1$ un intero. Dimostrare che il gruppo ortogonale

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) | A^{\mathrm{T}} \cdot A = \mathrm{Id}_n\}$$

è un chiuso di $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (dove X^{T} denota la matrice trasposta di X e Id_n rappresenta la matrice identità, definita richiedendo che la sua entrata al posto (i,j) sia 1 se $i = j$ se 0 altrimenti).

$$O_n(\mathbb{R}) = \left\{ (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} : \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} - \delta_{ij} = 0 \quad \forall i,j = 1,\dots,n \right\} =$$

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2 = 1 & (i,j) = (1,1) \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + \dots + a_{n1}a_{n2} = 0 & (i,j) = (1,2) \\ \vdots \end{cases}$$

$$= f^{-1}\left((\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \right)$$

$\rightsquigarrow$ f funzioni polinomiali date dal sistema ($\Rightarrow$ continua)

Esercizio 3. Sia $n \geq 1$ un intero. Dimostrare che il gruppo unitario

$$\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) | \overline{A}^{\mathrm{T}} \cdot A = \mathrm{Id}_n\}$$

è chiuso in $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (dove $\overline{A}$ è la matrice che si ottiene applicando il coniugio complesso alle entrate di A, mentre A^{T} e Id_n sono come nell'esercizio precedente).

Esercizio 4. Sia $K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$. Sia $g \geq 1$ un intero. Pongo

$$J_g = \begin{pmatrix} 0_g & \mathrm{Id}_g \\ -\mathrm{Id}_g & 0_g \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2g}(K),$$

dove, con notazioni standard, indico $O_g \in \mathrm{M}_{g\times g}(K)$ la matrice con tutte le entrate nulle, con $\mathrm{Id}_g \in \mathrm{GL}_g(K)$ la matrice identità come nei due esercizi precedenti, e con $-\mathrm{Id}_g$ la matrice definita richiedendo che la sua entrata al posto (i,j) sia -1 se $i = j$ se 0 altrimenti. Dimostrare che il gruppo simplettico

$$\mathrm{Sp}_g(K) = \{A \in \mathrm{GL}_{2g}(K) | A^{\mathrm{T}} \cdot J_g \cdot A = J_g\}$$

è chiuso sia in $\mathrm{M}_{2g\times 2g}(K)$ che in $\mathrm{GL}_{2g}(K)$.

GRUPPI TOPOLOGICI

es: $\left.\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \xrightarrow{(-1)} \mathbb{R} \end{array}\right\} \rightsquigarrow$ gruppo topologico

- Def. Un gruppo topologico è un gruppo $(G, \cdot)$ dotato di una topologia τ_G tale che la funzione

$$(G \times G, \tau_{prod.}) \xrightarrow{\varphi} (G, \tau_G)$$
$$(x, y) \longmapsto xy^{-1}$$

sia continua.

- Prop $(G, \cdot, \tau_G)$ gruppo topologico.

Le funzioni

(i) $\quad m: \quad G \times G \longrightarrow G$
$$(x, y) \longmapsto xy$$

(ii) $i : G \longrightarrow G$

$x \longmapsto x^{-1}$

(iii) $\lambda_e : G \longrightarrow G \qquad e \in G$

$x \longmapsto ex$

$\rho_e : G \longrightarrow G$

$x \longmapsto xe$

(iv) $\eta_e : G \longrightarrow G$

$x \longmapsto exe^{-1}$

sono funzioni continue

(ii), (iii), (iv) sono omeomorfismi

<u>Dim</u> $(p_1, i \circ p_2)$ ← se continua

$$G \times G \longrightarrow G \times G \xrightarrow{\varphi} G$$

$$(x, y) \longmapsto (x, y^{-1}) \longmapsto x(y^{-1})^{-1} = xy$$

⇝ m sarebbe continua

$i : G \longrightarrow G$ $\quad$ i continua

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(c_1, id)"] \arrow[rr, bend right, "i"'] & G \times G \arrow[r, "\varphi"] & G \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (1, x) \longmapsto 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}$$

i composizione $\Rightarrow$ i continua

funzioni continue $\Rightarrow$ m continua

(i), (ii)

(iii)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(c_a, id)"] \arrow[rr, bend left, "L_a"] & G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (a, x) \longmapsto ax$$

$\Rightarrow$ L_a continua

R_a uguale $\quad$ $\eta_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$

i omeom. $\rightsquigarrow$ continua $\quad$ $i \circ i = id$

L_a continua e $\quad$ $L_a \circ L_{a^{-1}} = id$ $\quad$ $\square$

__Corollario__ $(G, \cdot, \tau_0)$ è gruppo topologico sse m, i sono continue.

__Dim__

__Esercizio__

__Es__

$$\left.\begin{matrix} (\mathbb{R}, +), \quad (\mathbb{R}^n, +), \\ (\mathbb{R}^\times, \cdot), \quad (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \end{matrix}\right\} \text{gruppi topologici}$$

non abeliano