

June 19, 2022

ESERCIZI GEOMETRIA 2 PARTE B SETTIMANA 6 – SEPARAZIONE

Esercizio 1. Siano X e Y due s.t. e $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua. Definiamo il *grafico* di f come

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

dotato della topologia di sottospazio $\Gamma_f \subseteq X \times Y$. Supponiamo che Y sia di Hausdorff. Dimostrare che Γ_f è chiuso.

Esercizio 2. Trovare uno spazio topologico X in cui la diagonale $\Delta = \{(x, x) | x \in X\} \subseteq X \times X$ non è chiusa.

Esercizio 3. Dimostrare che lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di Hausdorff.

Esercizio 4. Dimostrare che la striscia di Moebius è di Hausdorff.

Esercizio 5. Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio topologico X è T_1 se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X .

Esercizio 6 (Versione generale di un esercizio precedente). Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e $G \subseteq \text{Aut}(X)$ un sottogruppo, dove indico con $\text{Aut}(X)$ il gruppo degli omeomorfismi $\varphi : X \rightarrow X$, con la legge di gruppo data dalla composizione. Dico che G agisce in modo *propriamente discontinuo* su X se per ogni coppia di punti x, y di X esistono intorno aperti U di x e V di y tali che $g(U) \cap V \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $g \in G$. Considero lo spazio quoziente X/G le cui classi di equivalenza sono gli insiemi $\{g(x) | g \in G\}$ al variare di $x \in X$. Dimostrare che se G agisce in modo propriamente discontinuo su X allora X/G è di Hausdorff.

Soluzione. Fisso x, y gli intorno U e V come nel testo, e indico con $g_1, \dots, g_n$ gli elementi di G tali che $g_i(U) \cap V \neq \emptyset$. Se x ed y sono due classi distinte di X/G , allora $g_i(x) \neq y$, dunque esistono due intorno U_i di $g_i(x)$ e V_i di y tali che $U_i \cap V_i = \emptyset$. Sia $V' = V \cap_{i=1}^n V_i$, $W_i = g_i^{-1}(U_i)$ e $U' = U \cap_{i=1}^n W_i$. Allora

$$(*) \quad gU' \cap V' = \emptyset, \text{ per ogni } g \in G.$$

Per mostrare (*), notiamo che se $g \neq g_i$, allora $g(U') \cap V' \subseteq g(U) \cap V = \emptyset$, mentre se $g = g_i$, allora $g_i(U') \cap V' \subseteq g_i(W_i) \cap V_i = \emptyset$. In particolare, da (*) segue anche che $gU' \cap hV' = \emptyset \neq \emptyset$, allora $(h^{-1}g)U' \cap V' \neq \emptyset$, che contraddice quanto abbiamo già mostrato. Abbiamo quindi dimostrato che se $[x] \neq [y]$ in X/G , allora esiste un intorno $\bar{U} = \pi(U')$ ed un intorno $\bar{V} = \pi(V')$ in X/G tali che $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$, dove con $\pi : X \rightarrow X/G$ abbiamo indicato la proiezione canonica; dunque X/G è di Hausdorff. $\square$

Esercizio 7 (Confrontare con l'esercizio precedente). Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e $G \subseteq \text{Aut}(X)$ un sottogruppo finito, dove indico con $\text{Aut}(X)$ il gruppo degli omeomorfismi $\varphi : X \rightarrow X$, con la legge di gruppo data dalla composizione. Considero lo spazio quoziente X/G le cui classi di equivalenza sono gli insiemi $\{g(x) | g \in G\}$ al variare di $x \in X$ (che sono dunque insiemi finiti). Dimostrare che X/G è di Hausdorff.

Soluzione. Fisso $[x] \neq [y]$ in X/G , quindi $x \neq g(y)$ per ogni $g \in G$. Fisso un aperto A di x ed un aperto B di y in modo tale che $A \cap B = \emptyset$. Considero ora per ogni $g \in G$ l'aperto $g(B)$ e fisso B_g intorno di $g(y)$ e A_g intorno di x tali che $A_g \cap B_g = \emptyset$. Considero ora $V_g = g(B) \cap B_g$, aperto contenente $g(y)$, e pongo $V = \bigcap_{g \in G} g^{-1}(V_g) = B \cap_{g \in G} g^{-1}(B_g)$, aperto che contiene y (uso che G è finito). Definisco $U = \bigcap_{g \in G} A_g$, aperto che contiene x (ancora uso la finitezza di

G). Allora $g(V) \cap h(U) = \emptyset$ per tutti gli elementi $g \in G$ e $h \in G$: se $g(V) \cap h(U) \neq \emptyset$, allora $(h^{-1}g)(V) \cap U \neq \emptyset$, ma abbiamo

$$(h^{-1}g)(V) \cap U \subseteq (h^{-1}g)((h^{-1}g)^{-1}B_{h^{-1}g}) \cap U \subseteq B_{h^{-1}g} \cap A_{h^{-1}g} = \emptyset$$

contraddizione; quindi $g(V) \cap h(U) = \emptyset$ per ogni g e h in G , dunque X/G è Hausdorff. $\square$