# LEZIONE 4

28/04/22

L'altra volta abbiamo dimostrato che se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione polinomiale allora è continua rispetto alla topologia euclidea.

E rispetto alla topologia di Zariski?

TOP ZARISKI SU $\mathbb{R}$

chiusi : sono collezioni finite di punti $+ \emptyset, \mathbb{R}$

aperti : $\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$

$f^{-1}$ commuta con il complementare

$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{aperto}}$ è aperto $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{f^{-1}(C)}_{\text{chiuso}}$ chiuso

$$f \in \mathbb{R}[x] \qquad f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : (f-y)(x) = 0\}$$

$=$ zeri reali del polinomio $f - y \in \mathbb{R}[x]$

$$\Rightarrow \# f^{-1}(\{y\}) < +\infty$$

$$f^{-1}(\{y_1, \dots, y_n\}) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\text{zeri del polinomio } f - y_i\right)$$

$$\# f^{-1}(\{y_1, \dots, y_n\}) \leq \sum_{i=1}^{n} \#\left(\text{zeri del polinomio } f - y_i\right)$$

$$< +\infty$$

Mostro che $f^{-1}\left(\text{chiuso per Zariski}\right)$ è chiuso per Zariski

$\rightsquigarrow$ Una funzione $f$ polinomiale è continua anche nella topologia di Zariski di $\mathbb{R}$

Come sono fatte le funzioni continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per la topologia di Zariski? Sono tutte polinomiali?

NO, essere continua per $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per la topologia di Zariski vuol dire $f^{-1}(\text{finito})$ è finito

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0,1 &\longmapsto x \\ 0 &\longmapsto 1 \\ 1 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

è continua per Zariski

però non è chiaramente polinomiale

Chiediamo che $f^* : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

preservi polinomi, cioè $f^*(\mathbb{R}[x]) \subseteq \mathbb{R}[x]$

in tal caso se $x \in \mathbb{R}[x] \rightsquigarrow \underset{\mathbb{R}}{id} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$f^*(x) = f^*(id_x) = id_x \circ f = f \in \mathbb{R}[x]$$

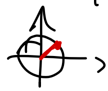
**Esercizio 4** (Esponenziale complessa)**.** La mappa esponenziale complessa $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita come dalla formula, per $z = x + iy$ un numero complesso,

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x \cdot \underbrace{(\cos(y) + i\sin(y))}_{e^{iy}}.$$

$\left\{ \begin{array}{l} e^x \text{ modulo} \\ y \text{ argomento} \end{array} \right.$

Dimostare i seguenti asserti:

1) • La restrizione di exp alla striscia orizzontale



$$B = \{z \in \mathbb{C} | 0 < \Im(z) < 2\pi\}$$

è iniettiva, dove indichiamo con $\Re(z)$ e $\Im(z)$ la parte reale ed immaginaria di $z$ (entrambi numeri reali); quindi $z = \Re(z) + i\Im(z)$.

2) • $\exp(B) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$.

3) • $\exp_{|B}$ ammette inversa $\log : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \to B$ definita da

$$\log(w) = \log|w| + i \cdot \arg(w)$$

dove a destra del segno di uguaglianza log indica il logaritmo reale e $\arg(w)$ l'argomento principale di $w$, ovvero $\arg(w) \in [0, 2\pi)$ e $w = |w|(\cos(\arg(w)) + i\sin(\arg(w)))$.

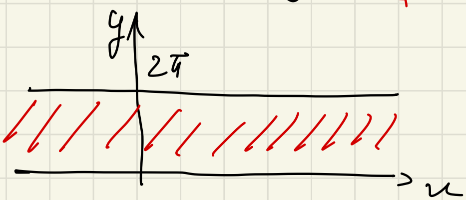
4) • Concludere che

$$\exp : B \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$$

è un omeomorfismo.

1) $z = x + iy \in \mathbb{C}$ supponiamo $e^z = e^{z'}$ $x = x'$

$z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$

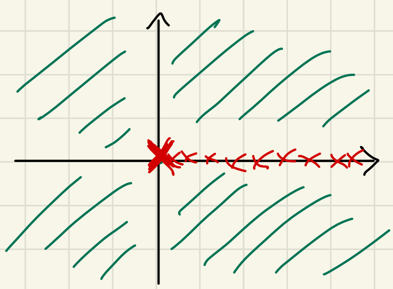



$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} e^x = e^{x'} & (\text{stesso modulo}) \Rightarrow \\ y \equiv y' \bmod 2\pi & (\text{stesso argomento}) \end{array} \right.$

$\Rightarrow y = y'$ poiché $0 < y, y' < 2\pi$

2) $\exp(B) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \begin{array}{l} \text{modulo qualunque} \\ \text{argomento } (0, 2\pi) \end{array} \right\}$

ovvio



$e^{i\theta} > 0$

3) $\exp_{|B} : B \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ biettiva

inversa ?

$$e^{z} = w \qquad z \in B, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow e^{z_1} \cdot e^{i z_2} = w = |w| \, e^{i \, Arg(w)} \longrightarrow 0 < Arg(w) < 2\pi$$

$$\Rightarrow e^{z_1} = |w| \quad , \quad e^{i z_2} = e^{i \, Arg(w)}$$

$$\Rightarrow z_1 = \log_{\mathbb{R}} |w| \quad , \quad z_2 = Arg(w)$$

Per cui l'inversa è:

$$\log_B : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow B$$

$$w \longmapsto \log_{\mathbb{R}} |w| + i \, Arg(w)$$

4) Exp continua perché $\exp_{\mathbb{R}}$ continua, $Re(z)$, $Im(z)$ continue, $e^{i\theta} : \mathbb{R} \to S^1$ continua

Notare che $|w|$, $\log_{\mathbb{R}}$, $\underbrace{\text{Arg}}_{\substack{\text{essenzialmente} \\ \text{un'arcotangente di } \frac{Re(z)}{Im(z)}}}$ funzioni continue

$\Rightarrow \log_B$ continuo.

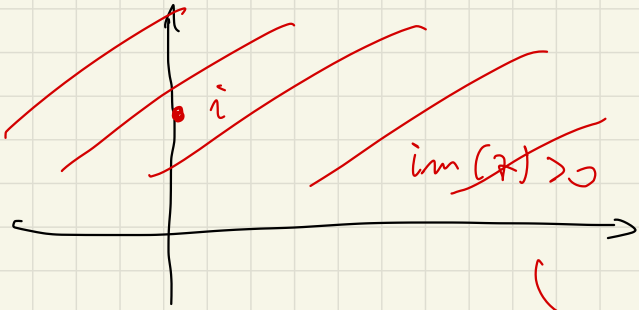
Per cui $\exp|_B$ omeomorfismo.

Nota bene: la scelta di $B$ è arbitraria

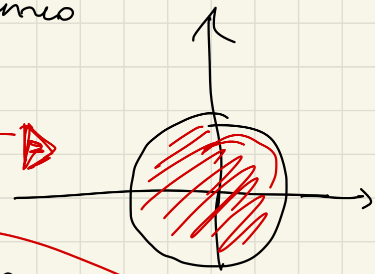
$\rightsquigarrow$ esiste un logaritmo definito su ogni insieme del tipo $\mathbb{C} \setminus \left\{ \begin{array}{l} \text{semiretta chiusa} \\ \text{per l'origine} \end{array} \right\}$

$Re(z) \geq 0$

**Esercizio 1.** Dimostrare che la funzione $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ definisce un omeomorfismo tra il semipiano complesso superiore $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ e il disco apert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | \parallel z \parallel < 1\}$ (entrambi dotati della topologia di sottospazio di $\mathbb{C}$).




$\mathbb{H}$ $\xrightarrow[\text{omeo}]{}$ $\mathbb{D}: |z| < 1$



$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

$$w(z+i) = z - i$$

$$wz + iw = z - i$$

$$(w-1)z = -iw - i$$

$$z = \frac{-iw-i}{w-1} \quad \text{se } w \neq 1$$

$$\operatorname{im}(z) = 0$$

ASSE X

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \operatorname{im}(z) = 0$$

$$-iz + i\bar{z} = 0$$

$$iz - i\bar{z} = 0$$

$$iz - i\bar{z} < 0, \quad \cancel{iz + i\bar{z} > 0}$$

$$i \cdot i - i \cdot (-i) = -1 - 1 = -2$$

$$f(\mathbb{H}) = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = f(z), z \in \mathbb{H} \right\}$$

$$= \left\{ w \in \mathbb{C} : f^{-1}(w) \in \mathbb{H} \right\} =$$

$$= \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left( \frac{iw - i}{w - 1} \right) > 0 \right\}$$

$$= \left\{ w \in \mathbb{C} : i\left( \frac{-iw - i}{w - 1} \right) - i\left( \frac{i\bar{w} + i}{\bar{w} - 1} \right) < 0 \right\}$$

$$\vdots$$

$$= \left\{ w \in \mathbb{C} : \underbrace{|w|^2}_{w\bar{w}} < 1 \right\} = \mathbb{D}$$

$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$f^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$\rightsquigarrow$ sono quozienti di polinomi

$\Rightarrow$ continue

$\rightsquigarrow$ OMEOMORFISMO

# PRODOTTO:

$$X_1 \times X_2 \rightsquigarrow \text{base è fatta da } U \times V$$

$U \subseteq X_1$, $V \subseteq X_2$ aperti

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ↗ BOX TOPOLOGY

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ↘ TOPOLOGIA PRODOTTO

Una base della topologia prodotto è data da $\cap$ finite di insiemi del tipo

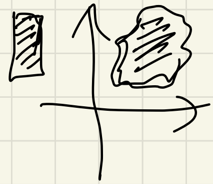
$$\underset{\substack{\cap \\ X_i}}{U} \times \prod_{\alpha \in I \setminus \{i\}} X_\alpha$$

**Esercizio 3.** Siano $S_1 \subseteq X_1$ e $S_2 \subseteq X_2$ due sottospazi. Dimostrare le seguenti proprietà:

(1) • $\overline{S_1 \times S_2} = \overline{S}_1 \times \overline{S}_2$.

(2) • $\text{Int}(S_1 \times S_2) = \text{Int}(S_1) \times \text{Int}(S_2)$.

(3) • $\text{Fr}(S_1 \times S_2) = (\text{Fr}(S_1) \times \overline{S}_2) \cup (\overline{S}_1 \times \text{Fr}(S_2))$.



(1) $\overline{S_1 \times S_2} = \bigcap C \subseteq$

$S_1 \times S_2 \subseteq C \subseteq X_1 \times X_2$ chiuso

$\subseteq \bigcap C_1 \times C_2 = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$

$S_i \subseteq C_i \subseteq X_i$ chiuso

$x \in \overline{S_1} \times \overline{S_2}$ $\quad x = (x_1, x_2)$

$\rightsquigarrow x = (x_1, x_2)$ t.c. $x_1 \in \overline{S_1}$, $x_2 \in \overline{S_2}$

$\forall U_1$ intorno aperto di $x_1$ $\quad U_1 \cap S_1 \neq \emptyset$

$\forall U_2$ intorno aperto di $x_2$ $\quad U_2 \cap S_2 \neq \emptyset$

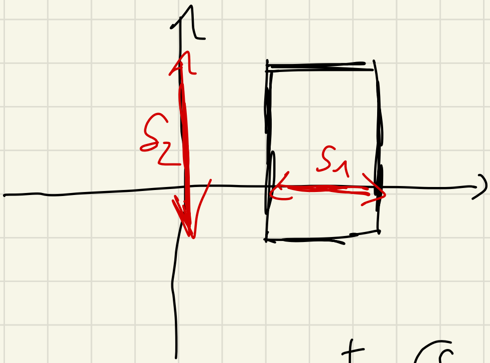
$U$ aperto di $X_1 \times X_2$, $U \supseteq U_1 \times U_2$ dove

$U_i$ intorno aperto di $x_i$ in $X_i$

$U \cap (S_1 \times S_2) \supseteq (U_1 \times U_2) \cap (S_1 \times S_2) = (U_1 \cap S_1) \times (U_2 \cap S_2) \neq \emptyset \rightsquigarrow x \in \overline{S_1 \times S_2}$

$$\operatorname{Fr}(S_1 \times S_2) = \left(\operatorname{Fr}(S_1) \times \overline{S_2}\right) \cup$$

$$\cup \left(\overline{S_1} \times \operatorname{Fr}(S_2)\right)$$




$$\operatorname{Fr}(S_1) = \{a, b\}$$

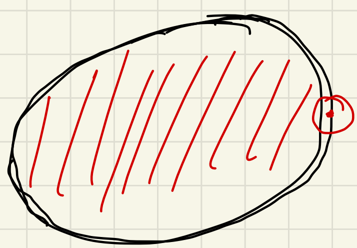
$$\overline{S_2} = [c, d]$$

$$\operatorname{Fr}(S_1) \times \overline{S_2} = \{(a,y) : c<y<d\} \cup$$

$$\cup \{(b,y) : c<y<d\}$$

$$\operatorname{Fr}(S_1 \times S_2) = \overline{S_1 \times S_2} \setminus \operatorname{Int}(S_1 \times S_2)$$

$$= \left(\overline{S_1} \times \overline{S_2}\right) \setminus \left(\operatorname{Int}(S_1) \times \operatorname{Int}(S_1)\right)$$



$$Fr(S_1) \times \overline{S_2} = (\overline{S_1} \setminus \mathrm{Int}(S_1)) \times \overline{S_2} \subseteq$$

$$\subseteq (\overline{S_1} \times \overline{S_2}) \setminus (\mathrm{Int}(S_1) \times \overline{S_2})$$

PICCOLA CORREZIONE: $\subseteq (\overline{S_1} \times \overline{S_2}) \setminus (\mathrm{Int}(S_1) \times \mathrm{Int}(S_2))$

IN CLASSE AVEVO DETTO CHE NON MI SEMBRAVA SERVISSE, MA SÌ.

$$\overline{S_1} \times Fr(S_2) \subseteq (\overline{S_1} \times \overline{S_2}) \setminus (\overline{S_1} \times \mathrm{Int}(S_2))$$

$$\subseteq (\overline{S_1} \times \overline{S_2}) \setminus (\mathrm{Int}(S_1) \times \mathrm{Int}(S_2))$$

Per cui

$$(Fr(S_1) \times \overline{S_2}) \cup (\overline{S_1} \times Fr(S_2)) \subseteq$$

$$\subseteq (\overline{S_1} \times \overline{S_2}) \setminus (\mathrm{Int}(S_1) \times \mathrm{Int}(S_2))$$

Se $(x_1, x_2) \in \overline{S_1} \times \overline{S_2}$, ma $x_i \notin Fr(S_i)$ $i = 1, 2$

$\leadsto$ $x_1 \in \mathrm{Int}(S_1)$ $\leadsto$ $(x_1, x_2) \in \mathrm{Int}(S_1 \times S_2)$

$x_2 \in \mathrm{Int}(S_2)$