March 29, 2022

ESERCIZI GEOMETRIA 2 PARTE B
SETTIMANA 5 – QUOZIENTI

Esercizio 1. Dimostrare che se $p : X \twoheadrightarrow Y$ è un'identificazione, allora la mappa $C \mapsto p(C)$ induce una biezione tra i chiusi saturi di X e i chiusi di Y.

Esercizio 2 (Spazi proiettivi reali)**.** Dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si ottiene da $\mathbb{S}^n$ identificando punti antipodali, scrivendo i dettagli dell'argomento usato a lezione, che ricordo brevemente. Indico con $\mathbb{S}^n/\sim$, per ogni intero $n \geq 1$, lo spazio topologico indotto dalla relazione di equivalenza che identifica punti antipodali: $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $x = -y$.

(1) La proiezione canonica $\mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n/\sim$ è aperta e chiusa.
(2) La mappa $\tilde{\mu} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \to \mathbb{S}^n$ definita da $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ è continua.
(3) La mappa $\mu = \tau \circ \tilde{\mu} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \to \mathbb{S}^n/\sim$ è continua ed induce una biezione insiemistica $\bar{\mu} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{S}^n/\sim$.
(4) Per mostrare che $\bar{\mu}$ è un omeomorfismo, visto che è continua e biettiva, basta mostrare che è aperta. Per questo, considero il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[rr, bend left, "\mu"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{S}^n \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{S}^n/\sim \\
& \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[ur, "\bar{\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

dove con π indico la mappa canonica (il fatto che sia commutativo, ovvero $\mu = \bar{\mu} \circ \pi$, è immediato). Allora se $A \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è aperto, ho

$$\bar{\mu}(A) = \mu(\pi^{-1}(A)) = \tau(\tilde{\mu}(\pi^{-1}(A))) = \tau(\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}(A))$$

e poiché $\pi^{-1}(A)$ è aperto perché π è continua, $\pi^{-1}(A) \cap \mathbb{S}^n$ è aperto di $\mathbb{S}^n$ per definizione di sottospazio topologico; infine, notando che τ è aperta, otteniamo che $\tau(\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}(A))$ è aperto. Quindi per ogni aperto A, $\bar{\mu}(A)$ è aperto, quindi $\bar{\mu}$ è un omeomorfismo.

Esercizio 3 (Piano proiettivo reale)**.** Scrivere i dettagli, seguendo la traccia fatta a lezione, del fatto che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo al quoziente di $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$, dove $\mathbf{I} = [0, 1]$, ottenuto identificando le coppie di punti $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ e $(s, 0) \sim (1 - s, 1)$.

Esercizio 4 (Retta proiettiva reale)**.** Scrivere i dettagli, seguendo la traccia fatta a lezione, del fatto che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$ (omeomorfismo); ricordo i passi illustrati a lezione. Sia S la circonferenza di raggio $1/2$ e contro $(0, -1/2)$:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y + 1/2)^2 = 1/4\}.$$

(1) Definire la mappa $\gamma : \mathbb{S}^1 \to S$ ponendo $\gamma((x_1, x_2)) = 0$ se $(x_1, x_2) = (1, 0)$ oppure $(x_1, x_2) = (-1, 0)$ e

$$\gamma((x_1, x_2)) = \left(-\frac{x_1 \cdot x_2}{|x|^2}, -\frac{x_2^2}{|x|^2} \right)$$

se $x_2 \neq 0$.
(2) Riconoscere che la mappa γ è costruita geometricamente mandando un punto x del cerchio $\mathbb{S}^1$ nel punto di intersezione tra S e la retta $r_x : 0 + \langle x - 0 \rangle$ (dove r_x indica la retta passante per $0 = (0, \dots, 0)$ e x).
(3) Notare che $\gamma(x) = \gamma(y)$ se e solo se $x = y$ oppure $x = -y$.

(4) Concludere che γ induce un'identificazione $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = (\mathbb{S}^1/\sim) \simeq S$ (omeomorfismo).
(5) Utilizzare un omeomorfismo $S \simeq \mathbb{S}^1$ per concludere che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$.

Esercizio 5 (Sfera di Riemann)**.** Trovare un omeomorfismo $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^2$ (suggerimento: utilizzare la proiezione stereografica).