LEZIONE 3

21/03/22

CONTINUITÁ

Esercizio 1. Siano X ed Y due spazi topologici e sia $y_0 \in Y$. Mostrare che la funzione $\varepsilon_{y_0} : X \to Y$ definita $x \mapsto y_0$ per ogni $x \in X$ è continua.

$$\varepsilon_{y_0}^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & y_0 \notin U \\ X & y_0 \in U \end{cases}$$

Esercizio 2. Mostrare che se X è dotato della topologia discreta, e Y è uno spazio topologico, ogni funzione $f : X \to Y$ è continua.

$U \in \tau_Y \qquad f^{-1}(U) \subseteq X \Rightarrow$ aperto

Esercizio 1. Dimostrare che se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, allora è anche un omeomorfismo.

Se sappiamo che una funzione lineare è continua siamo a posto

$$\text{Omeo} \equiv \begin{cases} \text{Continua} \\ \text{invertibile} \\ \text{inversa continua} \end{cases}$$

isom. di spazi vettoriali

- lineari $\Rightarrow$ continui
- invertibili

$\Downarrow$

- inverse lineari $\Rightarrow$ continue

• si dimostra prima che la metrica

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

è equivalente alla distanza euclidea

• applico definizione di continuità ε - δ

Esercizio 4. Siano X un insieme, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ uno spazio topologico e $f : X \to Y$ una funzione (in insiemi). Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi di X definita da

$$f^{-1}(\mathcal{T}_Y) = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{T}_Y\}$$

è una topologia su X rispetto alla quale f è continua, ed è la meno fine di tutte le topologie su X che rendono continua f.

(i) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \qquad X = f^{-1}(Y)$

(ii) $\bigcup_{i \in I} \underset{\in f^{-1}(\mathcal{T}_Y)}{U_i} = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\underset{\in \mathcal{T}_Y}{V_i}) =$

$= f^{-1}\Big(\underset{\in \mathcal{T}_Y}{\bigcup_{i \in I} V_i}\Big) \in f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$

$\underset{U_1}{f^{-1}(V_1)} \quad \underset{U_2}{f^{-1}(V_2)} \quad \mathcal{T}_Y$

(iii) $U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1 \cap V_2) \in f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$

Vediamo che $f : (X, f^{-1}(\mathcal{T}_Y)) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$

è continua, $\quad U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$

τ_X su X t.c. $f:(X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$

è continua, verifichiamo che $f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\tau_X$

$U\in f^{-1}(\tau_Y)$ $\quad U=f^{-1}(\underset{\tau_Y}{\underset{\cap}{V}})\in\tau_X$

ovvero $\quad f^{-1}(\tau_Y)\subseteq\tau_X$ $\quad\square$

Esercizio 6. Dimostrare che il determinante det : $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, dove $n \geq 1$ è un intero e denotiamo con $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle matrici quadrate a n righe ed n colonne a coefficienti in $\mathbb{R}$, dotata della topologia indotta dall'isomorfismo $\varphi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ definito mandando una matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ nell'elemento

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}, a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n-1}, a_{n,n})$$

(ottenuto giustapponendo le righe della matrice).

"Continua perché è una funzione polinomiale nelle entrate della matrice"

Dobbiamo dimostrare

Prop $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto p(x_1, \ldots, x_n)$

con $p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$

è una funzione continua.

$$\varphi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(a_{ij}) \longmapsto (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})$$

$U \subseteq M_n(\mathbb{R})$ aperto $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi(U)$ aperto in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd}
A=(a_{ij})_{ij} \arrow[r, mapsto] \arrow[ddr, bend right, mapsto] & (a_{11},\dots,a_{nn}) \arrow[dd, mapsto] \\
M_n(\mathbb{R}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & \mathbb{R}^{n^2} \arrow[d] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$\det(A) =$ un certo polinomio in $a_{11},\dots,a_{nn}$

<u>Dim</u> (semplice)

osservare che le proiezioni

$$p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{sono lineari}$$
$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_i$$

$\Rightarrow$ continue

$\Rightarrow$ polinomio continuo perché + di prodotti di proiezioni $x_1 x_2^2 \rightsquigarrow p_1 p_2 p_2$

$\square$

Dim (meno semplice)

Sfruttiamo solo che composizione di funzioni continue è continua

$$s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = 3x + 2xy^2$$

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$X \to \mathbb{R}^m$ cont. sse $p_i \circ f$ è continua $\forall i$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}^6$$

$$(x,y) \longmapsto (3, x, 2, x, y, y)$$

$$g_1 = (3, p_1, 2, p_1, p_2, p_2)$$

$$\mathbb{R}^6 \xrightarrow{g_2} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(t_1, \dots, t_6) \longmapsto (t_1 t_2, t_3 t_4 t_5 t_6)$$

$$f = s \circ g_2 \circ g_1 \Rightarrow f \text{ continue}$$

$\uparrow$ cont $\quad \uparrow$ cont $\quad \uparrow$ cont

Vediamo allora che somma e prodotto sono funzioni continue

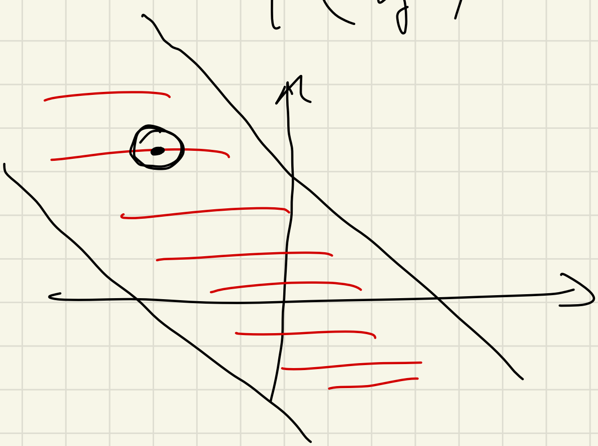
$\rightsquigarrow (\varepsilon - \delta)$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x+y$$

$\longrightarrow \quad (a,b) \subseteq \mathbb{R}$

$$s^{-1}(a,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a < x+y < b \right\}$$

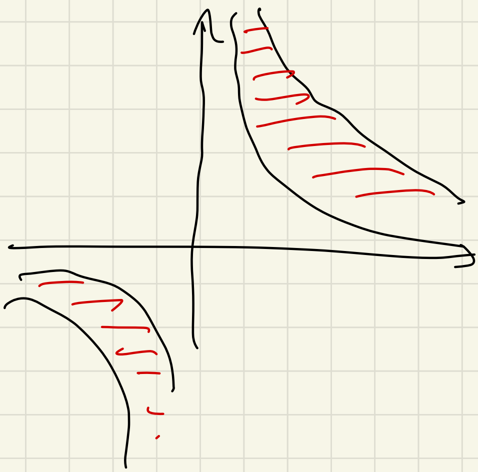
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a-x < y < b-x \right\}$$



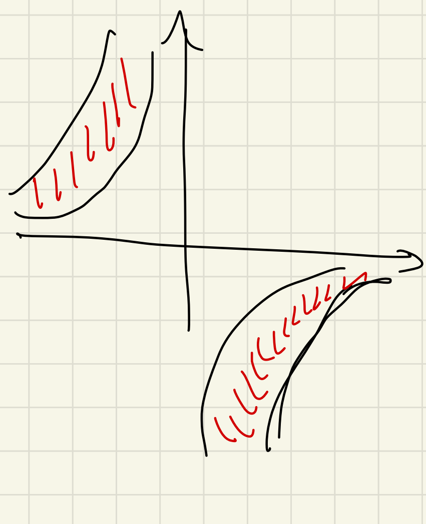
$$p^{-1}(a,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a < xy < b \right\}$$

$a, b > 0 \Rightarrow x \neq 0$

$$p^{-1}(a,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{a}{x} < y < \frac{b}{x} \right\}$$



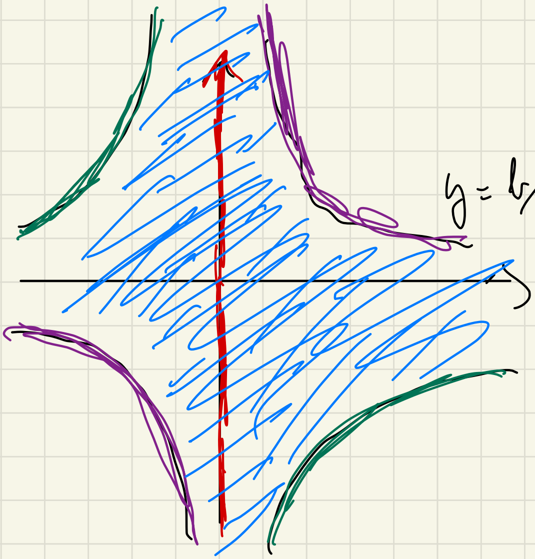
$a, b < 0$ $\qquad p^{-1}(a,b) =$



$a < 0, \quad b > 0$

$$p^{-1}(a,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a < xy < b \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{a < 0 \cdot y = 0 < b}_{\forall y} \right\} \cup$$



$$\cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{a}{x} < y < \frac{b}{x} \right\}$$

$x \neq 0$

$$\cdot : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

Continuo $\quad \left((a_{ij})_{ij}, (b_{ij})_{ij}\right) \mapsto (c_{ij})_{ij}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\cdot : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

$$\Big\downarrow c_{ij}$$

$$\mathbb{R}$$

$$X \times X \longrightarrow X$$

$\tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ prodotto $= \tau_{\mathbb{R}^2}$, Euclide

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(x) \end{aligned}$$

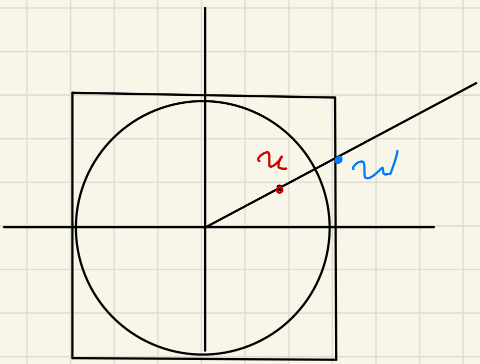
è continua

nella top euclidea

Se uso invece la topologia di Zariski ???

Esercizio 3. Dimostrare che
$$\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1$$
è omeomorfo a
$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$
tramite le seguenti mappe, una inversa dell'altra:

- $\psi : Q \to \mathbb{D}^2$ definita dalla formula
$$\psi(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ \frac{x}{\|x'\|} \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$$
dove x' è il punto di intersezione di $\mathrm{Fr}(Q)$ con la semiretta di origine 0 e passante per x.
- $\psi^{-1} : \mathbb{D}^2 \to Q$ definita dalla formula
$$\psi^{-1}(y) = \begin{cases} 0 \text{ se } y = 0 \\ \| y' \| \cdot y \text{ se } y \neq 0 \end{cases}$$
dove, come sopra, y' è il punto di intersezione di $\mathrm{Fr}(Q)$ con la semiretta di origine 0 e passante per y.



$$\psi(x) : Q \longrightarrow D^2$$

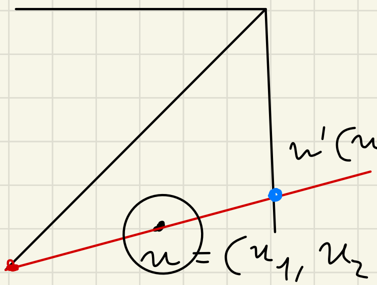
$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{\|x'\|} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

è continua ?

$x \neq 0$ id continua, $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x' : Q - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$x \longmapsto x'(x)$

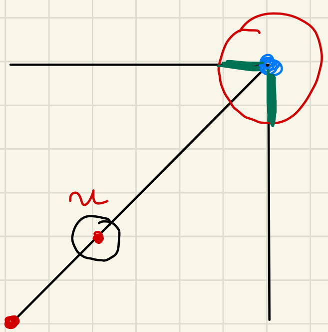


$$u'_1 = 1, \quad u'_2 = u_2/u_1$$

$$u'(u) = (u'_1, u'_2)$$

$$u = (u_1, u_2)$$

$$y = \left(\frac{u_2}{u_1}\right) x$$



$(0,0)$

$$y \in D(u, r)$$

$$u'(y) = \begin{cases} y_2/y_1 & \text{se } y \in \\ y_1/y_2 & \text{se } y \in \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ la funzione u' è continua attorno ad u

$$\psi\big(D(0, r)\big) \subseteq D(0, \varepsilon)$$

$y \in D(0, \varepsilon) \quad \psi(y) = \frac{y_r}{\|y'\|}$

$$\|\psi(y)\| = \left\| \frac{y_r}{\|y'\|} \right\| < \|y\| < \varepsilon$$