

March 22, 2022

ESERCIZI GEOMETRIA 2 PARTE B
SETTIMANA 4 – PRODOTTI

Esercizio 1. Siano X_1, X_2 due s.t. e $X = X_1 \times X_2$ il loro prodotto topologico. Dimostrare che $N \in \mathcal{N}_X((x_1, x_2))$ se e solo se esistono $N_1 \in \mathcal{N}_{X_1}(x_1)$ e $N_2 \in \mathcal{N}_{X_2}(x_2)$ tali che $N_1 \times N_2 \subseteq N$.

Esercizio 2. Dimostrare che $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ è continua in (x_1, x_2) se e solo se per ogni $N \in \mathcal{N}_Y(f((x_1, x_2)))$ esistono $N_1 \in \mathcal{N}_{X_1}(x_1)$ e $N_2 \in \mathcal{N}_{X_2}(x_2)$ tali che $f(N_1 \times N_2) \subseteq N$.

Esercizio 3. Siano $S_1 \subseteq X_1$ e $S_2 \subseteq X_2$ due sottospazi. Dimostrare le seguenti proprietà:

- $\overline{S_1 \times S_2} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$.
- $\text{Int}(S_1 \times S_2) = \text{Int}(S_1) \times \text{Int}(S_2)$.
- $\text{Fr}(S_1 \times S_2) = (\text{Fr}(S_1) \times \overline{S_2}) \cup (\overline{S_1} \times \text{Fr}(S_2))$.

Esercizio 4. Fissiamo due numeri reali $0 < a < b$ e definiamo la *corona circolare*

$$C_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq |z| \leq b\}.$$

Mostrare che $C_{a,b}$ è omeomorfa a $\mathbb{I} \times \mathbb{S}^1$ (dove $\mathbb{I} = [0, 1]$ e $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$).

Esercizio 5. Mostrare che se (X_1, d_1) e (X_2, d_2) sono due spazi metrici, allora (X, d) con $X = X_1 \times X_2$ e

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

è uno spazio metrico. Perché se definissi la distanza tramite il minimo al posto del massimo, ovvero come la funzione

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto \min\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

non otterrei (in generale) uno spazio metrico?

Esercizio 6. Fisso un intero $n \geq 1$. Dimostrare che $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, dove $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è l'insieme degli elementi di norma 1. Come si scrive e come si interpreta il risultato per $n = 0$?