

March 21, 2022

ESERCIZI GEOMETRIA 2 PARTE B SETTIMANA 4 – SOTTOSPAZI

Esercizio 1. Dimostrare che la funzione $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ definisce un omeomorfismo tra il semipiano complesso superiore $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ e il disco aperto $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$ (entrambi dotati della topologia di sottospazio di $\mathbb{C}$).

Esercizio 2. Sia $n \geq 1$ un intero. Dimostrare che il gruppo ortogonale

$$O(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T \cdot A = \text{Id}_n\}$$

è un chiuso di $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e di $GL_n(\mathbb{R})$ (dove X^T denota la matrice trasposta di X e Id_n rappresenta la matrice identità, definita richiedendo che la sua entrata al posto (i, j) sia 1 se $i = j$ se 0 altrimenti).

Esercizio 3. Sia $n \geq 1$ un intero. Dimostrare che il gruppo unitario

$$U(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^T \cdot A = \text{Id}_n\}$$

è chiuso in $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ e in $GL_n(\mathbb{C})$ (dove $\overline{A}$ è la matrice che si ottiene applicando il coniugio complesso alle entrate di A , mentre A^T e Id_n sono come nell'esercizio precedente).

Esercizio 4. Sia $K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$. Sia $g \geq 1$ un intero. Pongo

$$J_g = \begin{pmatrix} 0_g & \text{Id}_g \\ -\text{Id}_g & 0_g \end{pmatrix} \in GL_{2g}(K),$$

dove, con notazioni standard, indico $O_g \in M_{g \times g}(K)$ la matrice con tutte le entrate nulle, con $\text{Id}_g \in GL_g(K)$ la matrice identità come nei due esercizi precedenti, e con $-\text{Id}_g$ la matrice definita richiedendo che la sua entrata al posto (i, j) sia -1 se $i = j$ se 0 altrimenti. Dimostrare che il gruppo simplettico

$$\text{Sp}_g(K) = \{A \in GL_{2g}(K) \mid A^T \cdot J_g \cdot A = J_g\}$$

è chiuso sia in $M_{2g \times 2g}(K)$ che in $GL_{2g}(K)$.