LEZIONE 2

14/03/22

Esercizio 3. Siano A e B due sottoinsiemi di uno spazio topologico X. Dimostrare le seguenti relazioni:

(1) • $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$, e trovare un controesempio per l'altra inclusione;
(2) • $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$;
(3) • $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$ e trovare un controesempio per l'altra inclusione;
(4) • $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(5) • $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, e trovare un controesempio per l'altra inclusione.

(3) $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$

mostriamo che in generale non vale (=)

($\supseteq$)

$x \in \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$

$\Rightarrow \exists\, N_x$ intorno aperto di x t.c. $N_x \subseteq A$

$\Rightarrow \exists\, N'_x$ intorno aperto di x t.c. $N'_x \subseteq B$

$$N''_x = \underset{\substack{\cap \\ A}}{N_x} \cup \underset{\substack{\cap \\ B}}{N'_x} \subseteq A \cup B$$ è un intorno aperto di x

$\Rightarrow x \in \mathrm{Int}(A \cup B)$

In generale ($\neq$)

$$\mathrm{Int}([-1,0]) = (-1,0)$$

$$\mathrm{Int}([0,1]) = (0,1)$$

$$[0,1] \cup [-1,0] = [-1,1]$$

$$(0,1) \cup (-1,0) = (-1,1) \setminus \{0\}$$

(5) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ e in gen $\neq$

$$x \in \overline{A \cap B} \implies x \in \bigcap_{\substack{\text{chiusi } C \\ \text{t.c. } A\cap B \subseteq C}} C$$

$$\implies x \in \underbrace{\left(\bigcap_{\substack{\text{chiusi } C \\ \text{t.c. } A \subseteq C}} C \right)}_{= \bar{A}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{\substack{\text{chiusi } C' \\ \text{t.c. } B \subseteq C'}} C' \right)}_{= \bar{B}}$$

$\cancel{A = [-1, 0] \qquad B = [0, 1]}$

$\cancel{A \cap B = \{0\}}$

$A = (0, 1] \qquad B = (1, 2) \qquad (\neq)$

$$\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$$

Maniera alternativa:

$x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow \forall N$ intorno aperto di x

$$N \cap (A \cap B) \neq \emptyset$$

$$(N \cap A) \cap B = N \cap (A \cap B) = (N \cap B) \cap A$$

$$(N \cap A) \cap B \subseteq N \cap A \qquad (N \cap B) \cap A \subseteq N \cap B$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x \in \bar{A} \qquad\qquad x \in \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

Esercizio 4. Sia E un sottoinsieme denso di uno spazio topologico X e sia $U \subseteq X$ un aperto. Dimostrare che $\overline{E \cap U} \supseteq U$. Trovare un esempio in cui U è aperto e $\overline{E \cap U} \neq U$. La relazione $\overline{E \cap A} \supseteq A$ vale anche se A è chiuso?

E denso $\quad \overline{E} = X$, $\quad U \subseteq X$

$\overline{E \cap U} \supseteq U$

. $x \in U$

Voglio mostrare che è un pto di aderenza ovvero che $\forall N$ intorno del punto $N \cap (E \cap U) \neq \emptyset$

$$N \cap E \cap U \supseteq \underset{\substack{\text{intorno aperto} \\ \text{di } x}}{M} \cap E \cap U = (\overset{\text{aperto}}{M \cap U}) \cap E \neq \emptyset$$

perché E è denso

$\Rightarrow x \in \overline{E \cap U}$

Mostriamo che $\exists\, U$ aperto t.c.

$$\overline{U \cap E} \neq U$$

chiuso   aperto

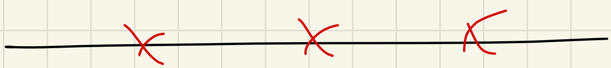
$(0,1)$ $E = \mathbb{Q}$

$\overline{\mathbb{Q} \cap (0,1)} = [0,1]$

esempio 1

$X = \mathbb{R}$ topologia di Zariski

esempio 2



Mostriamo che ogni aperto è denso

U aperto $= X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, $x \in X \longrightarrow x \in U \Rightarrow x \in \overline{U}$

$\downarrow$

$x \in \{p_1, \dots, p_n\}$

Prendiamo un intorno aperto di x, V aperto $x \in V$

$$U \cap V = \left(X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}\right) \cap \left(X \setminus \{q_1, \dots, q_m\}\right)$$

$$= X \setminus \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m\}$$

$$\neq \emptyset$$

$$\rightsquigarrow x \in \overline{U} \implies \boxed{\overline{U} = X}$$

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$U = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$E \cap U = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$\overline{E \cap U} = \mathbb{R}$$

$$U = \mathbb{R} \setminus \{1\} \neq \mathbb{R} = \overline{E \cap U}$$

Mostrare A chiuso t.c. $\overline{E \cap A} \neq A$

$$\mathbb{Q} = E, \quad A = \{\sqrt{2}\} \qquad \overline{E \cap A} = \overline{\emptyset} = \emptyset$$

$$\neq$$

Esercizio 5. Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$. Mostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X e calcolare chiusura, derivato, frontiera e interno degli insiemi $\{a\}$, $\{e\}$, $\{d, e\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, d, e\}$.

(i) ✓

(ii) $\forall$ Ogni 2 aperti che prendiamo

bene $\cup$ aperto

(iii) = con $\cap$

$\mathrm{Int}(\{d, e\}) = \emptyset$

$\overline{\{d, e\}} = \{c, d, e\}$

$(\text{Chiusi di } \mathcal{T}) = \{\emptyset, X, \{b, c, d, e\},$

$\{c, d, e\}, \{b, e\}, \{e\}, \{c, d\}\}$

$D(\{d, e\}) = \{c\}$

$a \notin D(\{d, e\})$ perché $\exists \{a\}$

intorno aperto di a t.c. $\{a\} \cap \{d, e\} = \emptyset$

$b \notin$ perché $\{a, b\} \cap \{d, e\} = \emptyset$

$c \in D(\{d, e\})$ perché

$\forall$ intorno $U = \{a, b\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}$

$\{a, b, c, d, e\}$

$U \cap \{e, d\} \neq \emptyset$

$d \notin D(\{d, e\})$ $\{a, c, d\} \cap (\{d, e\} \setminus \{d\})$

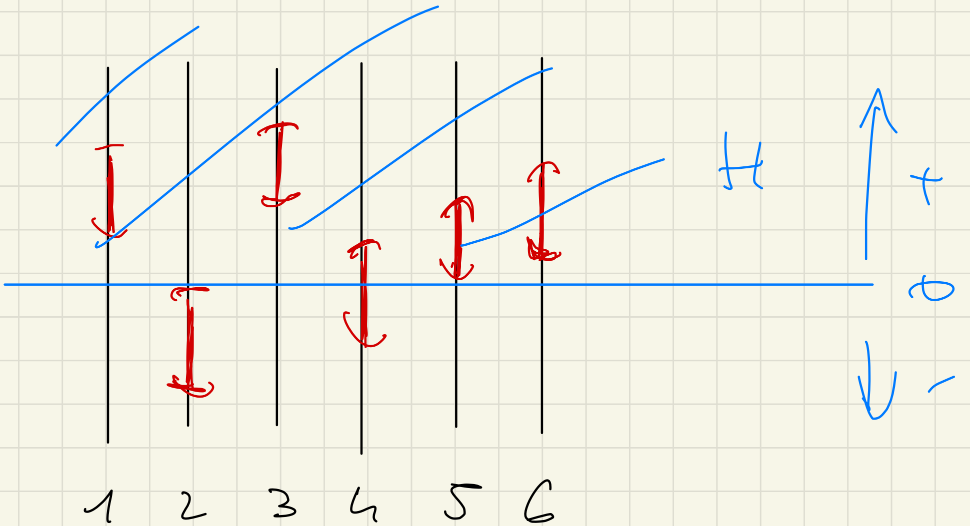
$= \{a, c, d\} \cap \{e\} = \emptyset$

$e \notin D(\{d, e\})$ $\{a, b, e\} \cap (\{e, d\} \setminus \{e\}) = \emptyset$

$$\mathrm{Ext}(\{d,e\}) = \mathrm{Int}(\{a,b,c\})$$
$$= \{a,b\}$$

$$\mathrm{Fr}(\{d,e\}) = X \setminus (\mathrm{Int}\{d,e\} \cup \mathrm{Ext}\{d,e\})$$
$$= X \setminus (\emptyset \cup \{a,b\})$$
$$= \{c,d,e\}$$

ES: BOX TOPOLOGY SU $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$



Un aperto è $\prod$ di aperti

$$U = \prod U_i \qquad U_i \subseteq \mathbb{R} \text{ aperti}$$

Un aperto di base per $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, BOX

è $$U = \prod_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i) \qquad a_i < b_i$$

VEDIAMO CHE SUCCEDONO COSE STRANE

$$H = \prod_{i \in \mathbb{N}} (0, +\infty) =$$

$$= \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \forall i \ \ x_i > 0 \right\}$$

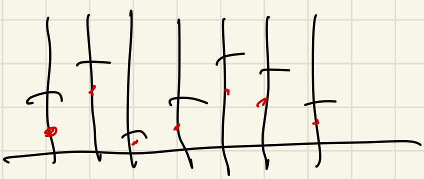
$\bar{H}$, $\quad \bar{0} = (0, 0, 0, 0, \ldots)$

U intorno di $\bar{0}$

$$U \supseteq \prod_{i \in \mathbb{N}} (-\varepsilon_i, +\varepsilon_i) \qquad \varepsilon_i > 0$$

$$H \cap U \supseteq H \cap \prod_{i \in \mathbb{N}} (-\varepsilon_i, +\varepsilon_i)$$

$$\neq \emptyset$$



Basta prendere $\{y_i\}$ con $0 < y_i < \varepsilon_i \quad \forall i$

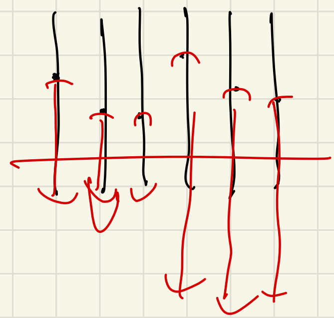
$$\rightsquigarrow \quad \bar{0} \in \bar{H}$$

Prendiamo $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, cerco una successione in X t.c. converge e $\bar{0} \in X$

Esiste? NO

$(x^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ successione a valori in X

$x^{(i)} = (x_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}}$



$$U = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(-x_n^{(n)}, x_n^{(n)}\right)$$

U intorno di $\bar{0}$, ma $\forall n$

$x_n^{(n)} \notin \left(-x_n^{(n)}, x_n^{(n)}\right)$, per cui

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad x^{(i)} \notin \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(-x_n^{(n)}, x_n^{(n)}\right)$$

(perché le sue coordinate i-esime non cade nell'i-esimo intervallo)

Tes. AGGIUNTO DOPO LA LEZIONE

prendiamo la successione $(x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$

$$x^{(j)} = \left(\tfrac{1}{j}, \tfrac{1}{j}, \tfrac{1}{j}, \dots, \right) \in X$$

$$x^{(1)} = (1, 1, \text{———})$$
$$x^{(2)} = (1/2, 1/2, \text{———})$$
$$x^{(3)} = (1/3, 1/3, \text{———})$$
$$x^{(4)} = (1/4, \text{———})$$

Sia $\quad U = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$\nexists\ n$ t.c. $\quad x^{(n)}_n = \frac{1}{n} \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \nexists\ n$ t.c. $x^{(n)} \in U$

$\lrcorner$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\overline{O} \text{ non è limite di successioni in } H\text{, ma appartiene a } \overline{H}}$

$\rightsquigarrow$ $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{BOX TOPOLOGY})$ NON È UNO SPAZIO METRIZZABILE.