

March 15, 2022

ESERCIZI GEOMETRIA 2 PARTE B SETTIMANA 3 – SOTTOSPAZI

Esercizio 1. Sia $S \subseteq X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T}_X)$, e indichiamo con $\mathcal{T}_S$ la topologia indotta da X su S . Dimostrare che se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}_X$, allora

$$\mathcal{B}_S = \{S \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

è una base di $\mathcal{T}_S$.

Esercizio 2. Dimostrare che $C \subseteq X$ è chiuso se e solo se l'inclusione canonica $C \hookrightarrow X$ che manda $x \mapsto x$ è chiusa.

Esercizio 3. Dimostrare che

$$\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è omeomorfo a

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

tramite le seguenti mappe, una inversa dell'altra:

- $\psi : Q \rightarrow \mathbb{D}^2$ definita dalla formula

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{\|x'\|} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

dove x' è il punto di intersezione di $\text{Fr}(Q)$ con la semiretta di origine 0 e passante per x .

- $\psi^{-1} : \mathbb{D}^2 \rightarrow Q$ definita dalla formula

$$\psi^{-1}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0 \\ \|y'\| \cdot y & \text{se } y \neq 0 \end{cases}$$

dove, come sopra, y' è il punto di intersezione di $\text{Fr}(Q)$ con la semiretta di origine 0 e passante per y .

Esercizio 4 (Esponenziale complessa). La mappa esponenziale complessa $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è definita come dalla formula, per $z = x + iy$ un numero complesso,

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Dimostrare i seguenti asserti:

- La restrizione di $\exp$ alla striscia orizzontale

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im(z) < 2\pi\}$$

è iniettiva, dove indichiamo con $\Re(z)$ e $\Im(z)$ la parte reale ed immaginaria di z (entrambi numeri reali); quindi $z = \Re(z) + i\Im(z)$.

- $\exp(B) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
- $\exp|_B$ ammette inversa $\log : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \rightarrow B$ definita da

$$\log(w) = \log|w| + i \cdot \arg(w)$$

dove a destra del segno di uguaglianza $\log$ indica il logaritmo reale e $\arg(w)$ l'argomento principale di w , ovvero $\arg(w) \in [0, 2\pi)$ e $w = |w|(\cos(\arg(w)) + i \sin(\arg(w)))$.

- Concludere che

$$\exp : B \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

è un omeomorfismo.