

TUTORATO DI GEOMETRIA 2

INCONTRO 12

10/01/2022

TROLETTI DANIELE



(i) $q(x, y, z, t) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + 2\lambda^2 z^2 - 2\lambda^2 zt + \lambda^2 t^2 = \lambda^2 q(x, y, z, t)$

e $q(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2) - q(x_1, y_1, z_1, t_1) - q(x_2, y_2, z_2, t_2) =$
 $= 2(x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2 + t_1t_2 + 2z_1t_2 + 2z_2t_1)$

è chiaramente una forma bilineare β di matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\det A_{(1,1)} = 1 \quad \det A_{(1,2)} = 1 \quad \det A_{(2,3)} = 2$

$\det A = 2$

Quindi i minori principali sono tutti positivi.
 $\Rightarrow$ è definita positiva.

La matrice è simmetrica e non degenera
 $\Rightarrow \beta$ è un prodotto scalare.

(iii) Se $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^\perp \Rightarrow \beta(x, x) = 0 \quad \forall i=1,2,3$

$\Rightarrow x^T A x = 0$

$\begin{cases} x_1^T A x = 0 \\ x_2^T A x = 0 \\ x_3^T A x = 0 \end{cases} \Rightarrow S^\perp = \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_1 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_1 = 0 \end{cases}$

con generatore
 $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\mathbb{E}' = \{e_0', e_1', e_2' + e_0'\}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}'' = \{e_0'', e_1'', e_2'' + e_1''\} = \{e_0'', e_1'', e_0'' + e_1'' + e_2'\}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il rango è 2, la segnatura (2,0) e la base in cui la metrica assume forma canonica è $\mathbb{E}''$.

(iii)

sono isotropo: $q(x, y, z) = 0$

$$x^2 + y^2 - 2xz - 2yz + 2z^2 = 0$$

$$\hookrightarrow (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0 \iff \begin{cases} x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

Quindi è il sottospazio $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

In generale non è un sottospazio perché definito da una equazione di secondo grado.

ES 3 FOLIO 11)

Base di V $\{1, x, x^2, x^3\}$

(i) $q(\lambda P) \stackrel{?}{=} \lambda^2 q(P) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$q(\lambda P) = \lambda^2 P(0)^2 + \int_{-1}^1 \lambda^2 P(x)^2 dx = \lambda^2 q(P).$$

• $q(P+Q) = q(P) + q(Q)$ e $q(P) - q(Q)$ è una forma bilineare.

$$\begin{aligned} & 2P(0)Q(0) + \int_{-1}^1 2P(x)Q(x) dx \quad \left| \quad \beta(P, Q) = P(0)Q(0) + \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx \right. \\ & \text{è una forma bilineare.} \end{aligned}$$

$$q(P) = \beta(P, P)$$

(ii) $\int_{-1}^1 x^k dx = \int_{-1}^1 d\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^1 = \begin{cases} 0 & k \text{ dispar} \\ \frac{2}{k+1} & k \text{ pari} \end{cases}$

$$\beta(1, 1) = 3$$

$$\beta(1, x) = 0$$

$$\beta(1, x^2) = \frac{2}{3}$$

$$\beta(1, x^3) = 0$$

$$\beta(x, x) = \frac{2}{3}$$

$$\beta(x, x^2) = 0$$

$$\beta(x, x^3) = \frac{2}{5}$$

$$\beta(x^2, x^2) = \frac{2}{5}$$

$$\beta(x^3, x^3) = 0$$

$$\beta(x^3, x^3) = \frac{2}{7}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

(iii)

$$E' = \{e_0, e_1, e_2 - \frac{2}{9}e_0, e_3\}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{35}{175} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$E'' = \{e_0', e_1', e_2', e_3' - \frac{3}{5}e_1'\} = \{e_0, e_1, e_2 - \frac{2}{9}e_0, e_3 - \frac{3}{5}e_1\}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{35}{175} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{175} \end{pmatrix}$$

$$\eta_n = (4, 0).$$

ES 4 FOLIO 11

$$f(L(A, B)) = L(f(A), f(B)) = L(B, C)$$

$$f(L(B, C)) = L(A, C)$$

$$f(L(A, C)) = L(A, B)$$

(i) Supponiamo per assurdo che esista π retto di punti fissi. Ovvero $A \notin \pi$, $B \notin \pi$, $C \notin \pi$.

Se $D \in \pi \cap L(A, B)$ e $f(D) = D$.

$$D = f(D) = f(\pi \cap L(A, B)) = f(\pi) \cap f(L(A, B)) = \pi \cap L(B, C)$$

$$\Rightarrow D \in \pi \cap L(A, B) \cap L(B, C) = B \Rightarrow D = B \quad \text{⚡}$$

(ii) Sia R un punto fisso di f . Per il punto (i) R non è allineato con due tra A, B, C .

$\Rightarrow \{A, B, C, R\}$ è un sistema di 4 pf. proiettivi.

$$f^3(R) = R$$

$$f^3(A) = f^2(B) = f(C) = A$$

$$f^3(B) = B \quad f^3(C) = C$$

$\Rightarrow f^3 \equiv \text{id}_P$ in un sistema di 4 pf. $\Rightarrow f^3 \equiv \text{id}_P$.

(iii)

Sia W il sottospazio proiettivo delle coniche passanti per A, B, C . dim $W = 2$.

Se $C \in W \Rightarrow f(C) \in W$ perché passa ancora per A, B, C .

$\Rightarrow f$ agisce su W come una proiezione

$\Rightarrow f$ avrà un punto fisso $Q \in W$.

Se fosse degeneri due punti tra A, B, C , sufficientemente
 A, B , staremmo su una delle due rette che
formano la conica $\Rightarrow L(A, B) \in Q$.

$\Rightarrow f(L(A, B)) = L(B, C) \in f(Q) = Q$

$\Rightarrow L(A, C) \in Q \Rightarrow \exists$ rette distinte in Q . ∇

$\Rightarrow Q$ è non degeneri.

ES 5 Foglio n.1

(i) $\dim S_1 = 4 - 3 = 1$

$$\dim S_2 = 4 - 2 = 2$$

$$\dim S_3 = 4 - 1 = 3$$

Le velle chiaramente che A, B, C, D sono linearmente indipendenti come vettori.

(ii)
$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \leadsto \quad x_3 - x_4 = 0$$

$$S_1 = L \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$S_2 = L \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet \frac{S_1 \cap S_2}{S_1 \cap S_2} :$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$



$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

$$\dim S_1 \cap S_2 = -1$$

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) = 1 + 2 - (-1) = 4$$

$$\cdot \quad \underline{S_1 \cap S_3} \quad S_1 \subseteq S_3$$

$$S_1 \cap S_3 = S_1 \Rightarrow \dim(S_1 \cap S_3) = \dim S_1 = 1$$

$$L(S_1, S_3) = S_3 \Rightarrow \dim(L(S_1, S_3)) = \dim S_3 = 3$$

$$\cdot \quad \underline{S_2 \cap S_3}$$

$$S_2 \cap S_3$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\dim(S_2 \cap S_3) = 4 - 3 = 1$$

$$\dim L(S_2, S_3) = \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_2 \cap S_3) = 2 + 3 - 1 = 4$$

(iii) Q punto $Q \notin S_1$

$$Q \mapsto L(Q, S_1) \cap S_2 \quad Q = [a:b:c:d:e]$$

$$Q \notin S_1 \Rightarrow a \neq 0, b \neq -c, d \neq e$$

$$\dim(L(Q, S_1)) = 2 \Rightarrow \text{risolvere 2 equazioni}$$

$$L(Q, S_1): \begin{vmatrix} x_0 & a & 0 & 0 \\ x_1 & b & 1 & 0 \\ x_2 & c & -1 & 0 \\ x_3 & d & 0 & 1 \\ x_4 & e & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

impongo che il rango non sia massimo.

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & b & 1 & 0 \\ x_2 & c & -1 & 0 \\ x_3 & d & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \leadsto (b+c)x_0 - 1x_1 - 1x_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & b & 1 & 0 \\ x_3 & d & 0 & 1 \\ x_4 & e & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \leadsto (b-d)x_0 + 1x_3 - 1x_4 = 0$$

$$L(Q, S_1) \cap S_2 :$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ (b+c)x_0 - 1x_1 - 1x_2 = 0 \\ (b-d)x_0 + 1x_3 - 1x_4 = 0 \end{cases} \leadsto$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{2} \frac{b-d}{b+c} x_1 \\ x_3 = \frac{1}{2} \frac{d-b}{b+c} x_1 \\ x_0 = \frac{1}{b+c} x_1 \end{cases}$$

$$f(Q) = \left[0 : b+c : 0 : \frac{d-b}{2} : \frac{b-d}{2} \right].$$

Consideriamo il fascio di coniche passanti per P con tangente π_P e per Q con tangente π_Q .
Sappiamo che le coniche degeneri del fascio sono

$$C_1 = \pi_P + \pi_Q \quad \text{e} \quad C_2 = L(P, Q) + L(P, Q)$$

Imponendo $\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & -1 & 2 \\ x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ si trova $L(P, Q): x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$

Quindi:

$$C_1: (3x_0 + 3x_1 + 5x_2)(x_0 - x_1 + x_2)$$

$$C_2: (x_0 + x_1 - 3x_2)^2$$

⇒ Il fascio è $C_{\lambda, \mu}: \lambda(3x_0 + 3x_1 + 5x_2)(x_0 - x_1 + x_2) + \mu(x_0 + x_1 - 3x_2)^2 = 0$

Imponendo il passaggio per R si ottiene

$$\lambda + 6\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad [\lambda, \mu] = [-6; 1]$$

da cui la conica cercata è

$$17x_0^2 - 19x_1^2 + 21x_2^2 - 2x_0x_1 + 54x_0x_2 - 6x_1x_2 = 0$$

ES 7 Fob 19 11

$$2\lambda x_0^2 - (\lambda + \mu)x_1^2 - (\lambda - \mu)x_2^2 - 2\mu x_0 x_1 - 2\mu x_0 x_2 = 0$$

(i)

$$C_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu & -\mu \\ -\mu & -\lambda - \mu & 0 \\ -\mu & 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix} \quad \det C_{\lambda, \mu} = 2\lambda^3$$

Conica degenera $\Leftrightarrow \det C_{\lambda, \mu} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow$ 1 sola conica degenera

$$D: -x_1^2 + x_2^2 - 2x_0 x_1 - 2x_0 x_2 = 0$$

$$\underbrace{(2x_0 + x_1 - x_2)}_{l_1} \underbrace{(x_1 + x_2)}_{l_2} = 0$$

Prendiamo una conica non degenera

$$C: 2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$\cdot D \cap C:$

$$\begin{aligned} -l_1, l_2: & \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases} \leadsto \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2(x_0^2 - x_1^2) = 0 \\ 2(x_0 + x_2)(x_0 - x_2) \end{cases} \\ A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$-C_1 l_2$$

$$\begin{cases} 2x_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_0 + x_1 \\ 2(x_0 + x_1)^2 = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow A$ con molteplicità 2

$\Rightarrow$ l'intersezione di due coniche generiche del fascio è $\{A, A, A, B\}$

(iii) Sia $P = l_1 \cap l_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = A$.

Sia r la retta tangente a C in A . Questa retta è unica.

Le rette tangenti a D sono le rette passanti per A .

$\Rightarrow$ Esiste una sola retta tangente a tutte le coniche del fascio.

(iii) $C_{\lambda, \mu}$ è parabola $\Leftrightarrow \det(C_{\lambda, \mu})_0 = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda - \mu) = 0 \Rightarrow 2 \text{ possibilità.}$$

$$C_{\lambda, \lambda} \text{ e } C_{\lambda, -\lambda}$$

- $\mathcal{F}$ non può contenere più di due coniche doppiamente degeneri.

Siano $C_1 = \pi + \eta$ e $C_2 = \sigma + \tau$ con $\pi \neq \tau$
 due coniche doppiamente degeneri di $\mathcal{F}$. A meno
 di cambiare sistema di riferimento posso supporre
 $\pi: x_0 = 0$ $\tau: x_1 = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{\lambda\mu}: \lambda x_0^2 + \mu x_1^2 = 0 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C_{\lambda\mu}$$

Si vede chiaramente che

$$C_{\lambda\mu} \text{ doppiamente degenera} \Leftrightarrow \text{rk } C_{\lambda\mu} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ o } \mu = 0.$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ non può avere altre coniche doppiamente degeneri.

- Siano $C_1 = \pi_1 + \pi_2$ e $C_2 = \tau_1 + \tau_2$ due coniche che generano $\mathcal{F}$.

$$\text{Siano } A = \pi_1 \cap \pi_2 \quad \text{e} \quad B = \tau_1 \cap \tau_2$$

$$\text{Se } A = B \Rightarrow \text{ok.}$$

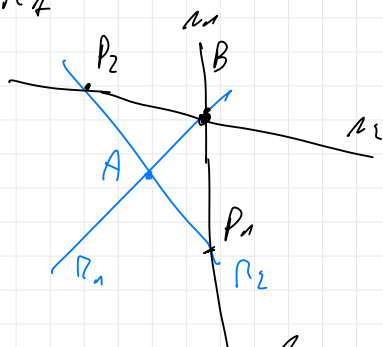
Supponiamo per assurdo che $A \neq B$.

A meno di cambiare C_1 e C_2 supponiamo $A \notin C_2$,

$\Rightarrow$ Se $B \in C_2$, supponiamo $B \in \Pi_2$

$$\text{Allora } P_1 = \Pi_2 \cap \Pi_1$$

$$P_2 = \Pi_2 \cap \Pi_2$$



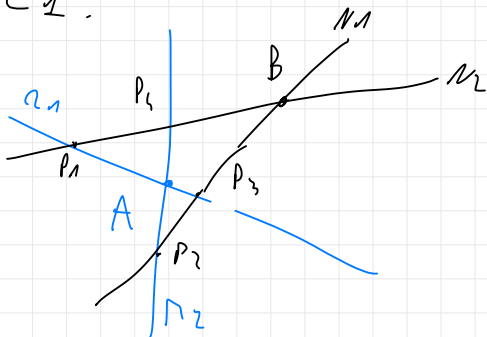
No!

$\{B, P_1, P_2\}$ sono in posizione generale
 $P_1, P_2 \notin \Pi_2$.

$\Rightarrow$ Il fascio generato da C_1 e C_2 è il fascio delle coniche passanti per P_1, P_2 e in B tangenti a Π_1 .

$\Rightarrow$ Γ contiene solo due coniche degeneri. $\Leftarrow$

$\Rightarrow B \notin C_1$.



No!

Però C_1 e C_2 si intersecano in 4 punti distinti
e $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ sono in posizione generale

$\Rightarrow \Gamma$ è il fascio di coniche passanti per P_1, P_2, P_3, P_4

ma questo fascio contiene solo 3 curve
degeneri. ζ .

$$\Rightarrow A = B.$$

Finiamo un sistema di coordinate x_0, x_1, x_2
in $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ tale che

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \pi_1: L(A, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) \quad , \quad \pi_2: L(A, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \pi_1 \Rightarrow \pi_1: L(A, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

$$C_1: x_1 x_2 = 0$$

$$C_2: (x_1 - x_2)(x_1 + \alpha x_2) = 0$$

$$\Rightarrow C_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & \lambda + \mu(\alpha - 1) \\ 0 & \lambda + \mu(\alpha - 1) & -2\mu\alpha \end{pmatrix} \quad C_{\lambda, \mu}^0$$

$C_{\lambda, \mu}$ è differentemente degenere $\Leftrightarrow \text{rk } C_{\lambda, \mu} = 1$

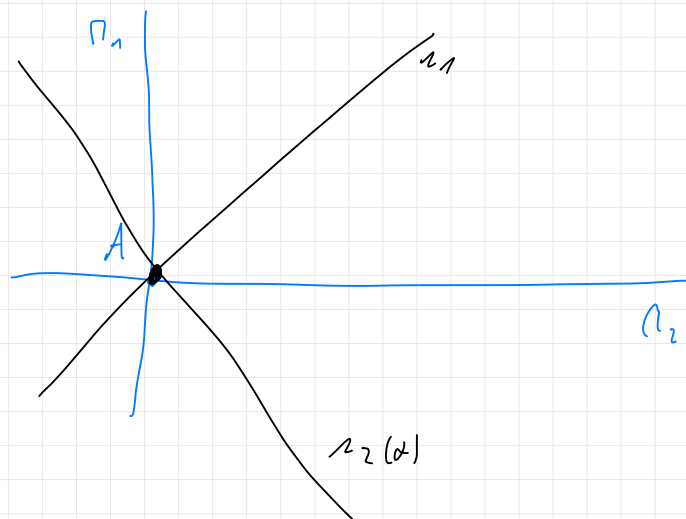
$$\Leftrightarrow \det C_{\lambda, \mu}^0 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2(\alpha - 1)\lambda\mu + (\alpha + 1)^2\mu^2 = 0$$

Questa equazione ammette 2 soluzioni

$n \in \mathbb{C}$ eventualmente coincident.

$\Delta = -4\alpha \neq 0$ quindi le due soluzioni sono distinte e quindi ho 2 coniche doppiamente degeneri.

Se $\alpha = 0 \Rightarrow \pi_2: X_1 = 0 \Rightarrow \pi_1 = \pi_1$ $\checkmark$.



Il metodo più semplice consiste nel considerare il fascio di coniche passant. per P_1, P_2 e P_3 e tangenti in P_3 a $x_0 - x_2 = 0$. Le coniche degeneri di questo fascio sono:

$$C_1 = \pi + L(P_1, P_2)$$

$$C_2 = L(P_1, P_3) + L(P_2, P_3)$$

Con un semplice calcolo si trova

$$C_1: \lambda_0(x_0 - x_2) = 0$$

$$C_2: (2x_1 - x_2)(x_0 - 2x_1) = 0$$

Quindi il fascio è $C_{\lambda, \mu}: \lambda x_0(x_0 - x_2) + \mu(2x_1 - x_2)(x_0 - 2x_1) = 0$

Imponendo il passaggio per P_4 otteniamo

$$6\lambda - 3\mu = 0 \Rightarrow 2\lambda = \mu \Rightarrow [\lambda, \mu] = [1:2]$$

Quindi la conica cercata è

$$x_0^2 - 8x_1^2 + 4x_0x_1 - 3x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0$$

(i) $\mathcal{C}: Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$

• Tangente con π_z :

$$\begin{cases} x = 0 \\ Ax^2 + \dots = 0 \end{cases}$$

ha una soluzione

$$By^2 + 2Fyz + Cz^2 = 0$$

ha una soluzione e $F^2 - BC = 0$

Analogamente $E^2 = AC$ e $D^2 = AB$.

Le condizioni NON sono lineari $\Rightarrow$ non è un piano.

caso singolare:

- Se $D = \pi_1 + \pi_2$ con $\pi_1 \neq \pi_2$

π è tangente a D e π passa per $\pi_1 \cap \pi_2$

$\Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ quindi $\nexists$ coniche semplicemente degeneri in $\mathcal{C}$.

- Se $D = \pi + \pi$ o se π interseca ogni retta di $\mathbb{P}_q^2 \Rightarrow \pi$ interseca π_1, π_2, π_3 e π_4

$\Rightarrow D$ è tangente a $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$

$\Rightarrow F$ contiene tutte le coniche doppiamente degeneri di $\mathbb{P}^2$.

(iii) $C: x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A \quad \det A \neq 0 \quad \Rightarrow C \text{ è non degenera.}$

Verifichiamo che C è tangente a Π_1, Π_2, Π_3 poiché verifica le condizioni del punto (i)

$$\begin{cases} C \\ \Pi_4 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2x + 2y \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0 \end{cases}$$

$\leadsto x^2 - 2xy + y^2 = 0 \quad (x-y)^2 = 0 \quad \leadsto \Pi_4 \text{ è tangente a } C \Rightarrow C \in F.$

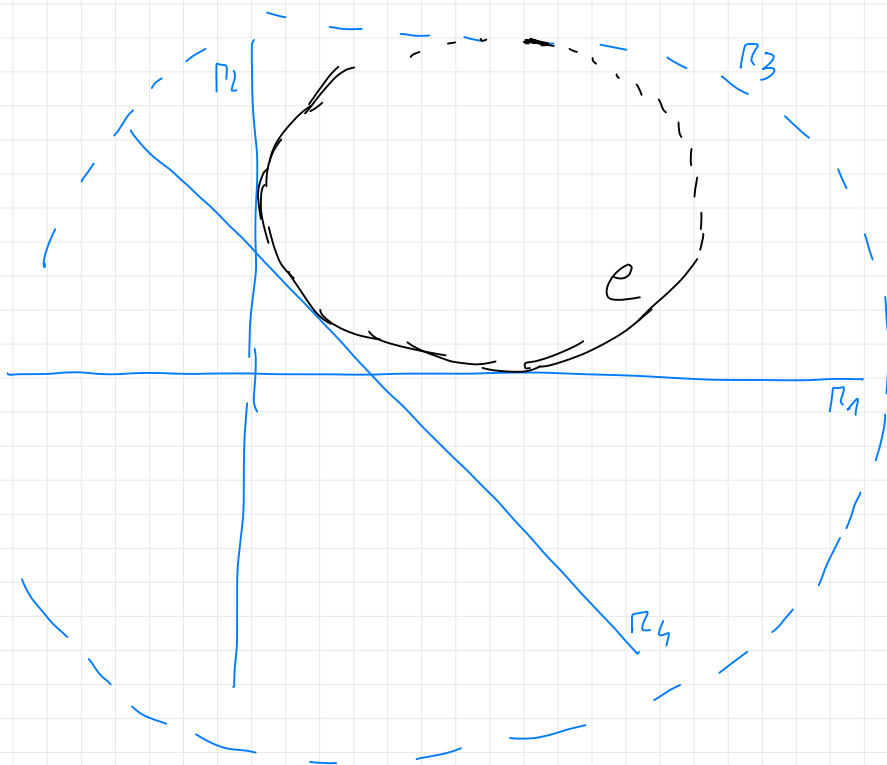
$$U = \{z \neq 0\} = \mathbb{P}^2 \setminus \Pi_3$$

$C \cap U$ è una parabola poiché tangente a Π_3 .

$$C \cap U: x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A_0 = 0.$$



(i) $A \in \Pi_1$ e $B \in \Pi_2$ quindi per la teoria vista a lezione questo è un fascio di coniche con coniche degeneri che lo generano

$$D_1 = L(A, B) + L(A, B) \quad D_2 = \Pi_1 + \Pi_2$$

Quindi è il fascio

$$C_{\lambda, \mu} = \lambda y^2 + \mu x(x - 2z) = 0$$

$$A_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\mu \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\mu & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Come coniche non degeneri possiamo prendere

$$C_1 : x^2 + y^2 - 2xz = 0$$

$$\lambda = \mu = 1$$

$$C_2 : x^2 - y^2 - 2xz = 0$$

$$\lambda = 1, \mu = -1$$

(iii) Intersecco C_2 con le coniche degeneri D_1 :

$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2xz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ x(x - 2z) = 0 \end{cases}$$

otteniamo quindi come soluzioni $\{A, A, B, B\}$.

(iv) $C_{\lambda, \mu}$ è degenera $\Leftrightarrow \det A_{\lambda, \mu} = 0 \Leftrightarrow \lambda \mu^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \mu = 0$$

Quindi le uniche coniche degeneri sono D_1 e D_2 .