

TUTORATO DI GEOMETRIA 2

INCONTRO 11

20/12/2021



ES 12 FOLIO 19

C parabola affine reale.

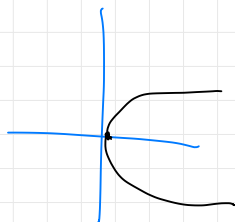
. Se C è degenera $\Rightarrow \infty$ -centri di simmetria

. Se C è non degenera $\Rightarrow$ non ha centri di simmetria

SOL

$$y^2 = x$$

parabola generata



$$y^2 = 1$$

f. semplicemente
degenera



$$y^2 = 0$$

f. doppiamente
degenera



Se $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un punto affine e se

$W_{P,-1}$ omotetia di centro P e valore -1

$$W_{P,-1}(x) = -1\left(x - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -x + 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\updownarrow$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & -1 & 0 \\ 2b & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \{ W_{D,1-1} \leftrightarrow {}^t P A P$$

$$\begin{pmatrix} 4h-2 & \frac{1}{2} & -2h \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4h^2-1 & 0 & -2h \\ 0 & 0 & 0 \\ -2h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4h^2 & 0 & -2h \\ 0 & 0 & 0 \\ -2h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esistono $\begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix}$ tali che ${}^t P A P \stackrel{*}{=} A$?

$$\cancel{A} \begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix}$$

$$h=0$$

$$h=0$$

-Centri di simmetria sono:

NESSUNO

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non x

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non x

ES 20 FOLIO 10

In generale abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ -c & e & f \end{pmatrix} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{C}$ ha centro in P_0 ?

Il centro di $\mathcal{C}$ è la soluzione dell'equazione

$$A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underline{d}_0 = 0$$

$$\begin{cases} b + dx + ey = 0 \\ c + ex + fy = 0 \end{cases}$$

dove over sol. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ -c + e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -b \\ e = -c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -b & -c \\ c & -c & f \end{pmatrix}$$

equazione proiettiva corrispondente:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a x_0^2 + 2b x_0 x_1 + 2c x_0 x_2 - b x_1^2 - 2c x_1 x_2 + f x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ -bx_1^2 - 2cx_1x_2 + fx_2^2 = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo avere come soluzioni: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} -b + cf - 4c = 0 \\ -b + cf + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2f \\ c = \frac{1}{2}f \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 2f & \frac{1}{2}f \\ 2f & -2f & -\frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}f & -\frac{1}{2}f & f \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}$ generale $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

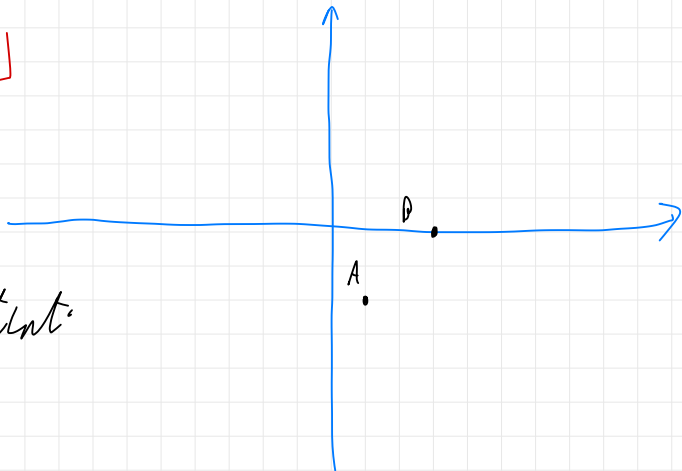
$$\det A = -\frac{9}{4}f^3(a+2f) \neq 0$$

Se $f \neq 0$ e $a+2f \neq 0$ allora A è la matrice di una conica arcuata.

ES 22 Feb 10 10

Le condizioni (c)
dice che ci sono 2
punti impropri distinti.

$\Rightarrow C$ è iperbole.



(2) implica che C è due rette distinte non
parallele

NB: nel proiettivo A, B non sono allineati
né con Q_1 né con Q_2 .

2 punti impropri sono le direzioni delle rette
 $\Rightarrow$ ho solo due possibilità:

Scritto nel proiettivo

$$C_2 = L(A, Q_1) + L(B, Q_2)$$

$$C_1 = L(A, Q_2) + L(B, Q_1)$$

$$\Rightarrow C_2 = (x - 2y - 5)(x + y - 3) = 0$$

$$C_1 = (x - y + 4)(x - 2y - 3) = 0$$

Il centro di C_1 e C_2 è l'intersezione delle due rette che le compongono

$$\Rightarrow \text{centro di } C_2: \begin{cases} x-2y-5=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \frac{11}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\text{centro di } C_2: \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{array} \right)$$

ES 29 Feb 10 10

$$\frac{1}{5}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + 2y + \frac{5}{5} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det A_0 = \frac{1}{5} > 0 \quad \det A = 0 \quad \text{rang}(A) = 2$$

Ellisse degenera $\Rightarrow$ equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ con $a \geq b > 0$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = P_1^* A P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: \frac{x^2}{5} + y^2 = 0$$

$$a=2 \\ b=0$$

(iii) $\mathcal{C}$ è solo una isometria f_1 :
 $f_1(x) = (x+1, y-1)$

$$(iv) \quad \bar{f}_1^{-1}(x) = (x-1, y+1)$$

(v) Cambio di coordinate dato da f_1 :

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

Nel i.d.r. in cui $\mathcal{C}$ è in forma canonica
il centro O ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ in RA ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La base $E' = E$.

$\Rightarrow$ In $RA\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, E\right)$ $\mathcal{C}$ ha forma canonica.

(i) Forme canoniche delle parabole:

$$y^2 - 2px = 0$$

$$y^2 - x^2 = 0$$

$$-y^2 + x^2 = 0$$

$$y^2 = 0$$

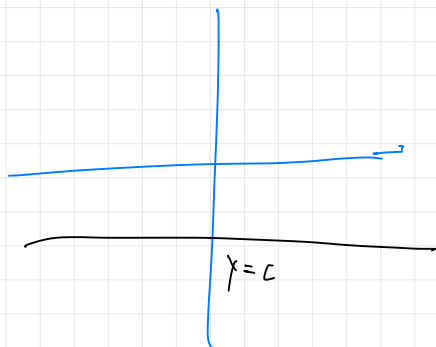
In ogni caso $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_0(D) = \langle e_2 \rangle$.

(ii) Rette parallele a $\langle e_1 \rangle$.

$$\pi_c: y = c \quad c \in \mathbb{R}$$

Riflessione p_c rispetto a π_c

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2c & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto {}^t \Pi A_1 \Pi = \begin{pmatrix} 4c^2 & -1 & -2c \\ -1 & 0 & 0 \\ -2c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

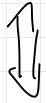
$$A_n \stackrel{x}{=} {}^* \Pi A \Pi \iff C = 0$$

$\Rightarrow \gamma = 0$, l'axe x , e l'unico retto circulo.

$$A_{2,3,4} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \in \{0^2, -0^2, 0\}$$

$${}^* \Pi A_{2,3,4} \Pi = \begin{pmatrix} \varepsilon + 4x^2 & 0 & -2x \\ 0 & 0 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{2,3,4}$$



$$C = 0.$$

ES 38 Feb 10 10

$$\Pi_1: x + 2y + z = 0$$

$$D_1 = (4, -3)$$

$$\Pi_2: 8x - y - 1 = 0$$

$$Q_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

Se RC' il n.d.n. in cui C è in forma canonica, allora avrà equazione

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Centri $O' = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

sono $\underline{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\underline{\Pi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i vettori

direzione di Π_1 e Π_2 risp.

$$\Rightarrow E' = \left(\frac{\underline{\Pi}_1}{\|\underline{\Pi}_1\|}, \frac{\underline{\Pi}_2}{\|\underline{\Pi}_2\|} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det C > 0.$$

$$E' = EC$$

$$P = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ -1 & & C \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ y = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}} (2x - y - 1) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}} (x + 2y + 2) \end{cases}$$

Quindi troviamo le coordinate di Q_1, Q_2 in RC' :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Imponendo il passaggio:

$$\frac{x'^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x'^2 + 16y'^2 = 20$$

Metto le equazioni del conico d.i.d.n:

$$C: 4x^2 + 13y^2 + 12xy + 12x + 26y - 7 = 0.$$

ES 1 ESAME 21/01/2021

$P_1, \dots, P_5$ punti di $\mathbb{P}^2$.

1) Supponendo che comunque si scelgano 4 punti questi non sono allineati, mostrare che $\exists!$ conica passante per i $P_1, \dots, P_5$.

2 punti P_1, P_2, P_3, P_4 non sono collineari
 $\Rightarrow$ le coniche per P_1, P_2, P_3, P_4 formano un fascio.

2 punti base sono P_1, P_2, P_3, P_4 ed eventualmente una retta e 3 dei quattro punti sono collineari.

$P_5 \notin \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

Se tre punti sono allineati, supponiamo P_1, P_2, P_3 , allora P_5 può appartenere $L(P_1, P_2)$?

No perché altrimenti P_1, P_2, P_3, P_5 collineari. $\nexists$

$\Rightarrow P_5$ non è un punto base del fascio

Il passaggio per P_5 è una condizione lineare

$\Rightarrow \exists!$ la conica cercata.

2) Questa conica può essere degenera?

C è degenera $\Leftrightarrow C = L_1 + L_2$, con event. $L_1 = L_2$.

Se $L_1 = L_2 \Rightarrow$ i 5 punti dovrebbe essere collineari $\nabla \Rightarrow L_1 \neq L_2$

Se C è degenera $\Leftrightarrow C = L_1 + L_2$ allora una delle due rette, supponiamo L_1 , deve contenere 3 punti P_i .

$\Rightarrow$ ho 3 punti allineati.

Verifichiamo se ho 3 punti allineati $\Rightarrow C$ deve contenere la retta per questi tre punti.
 $\Rightarrow C$ è degenera.

1) Se P_1, P_2, P_3, P_4 allineati, quante coniche passanti per $P_1, \dots, P_5$ esistono?



P_5	$\left \begin{array}{l} 4 \text{ punti allineati} \Rightarrow C \text{ degenera} \\ P_5 \text{ non allineato} \Rightarrow C \text{ sing. degenera} \end{array} \right.$
-------	--

$C = L_1 + L_2$ e necessariamente $L_1 = L(P_1, P_2)$

Quanto in $\mathbb{P}^2_C \Rightarrow$ qualsiasi retta r per P_5

interessa $L(P_1, P_2) \Rightarrow C = r + L(P_1, P_2)$

soddisfa le richieste $\forall$ retta r passante per P_5 .

d) Mostrare che $\mathcal{F} = \{C \mid P_1, \dots, P_5 \in \text{supp}(C)\}$ è un sistema lineare e calcolarne la dimensione.

Il passaggio per $P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ impone la condizione

$$Ax_i^2 + Bx_i y_i + Cx_i^2 + 2Dx_i z_i + 2E y_i z_i + F z_i^2 = 0$$

che è una condizione lineare

$\Rightarrow \mathcal{F}$ è un sistema lineare.

• Se $\nexists$ 4 punti collineari $\Rightarrow \dim$ è zero.

• Se esattamente 4 punti collineari:

hanno Π_1, Π_2 due rette per P_5

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(L(P_1, P_2) + \Pi_1, L(P_1, P_2) + \Pi_2)$$

è un fascio di coniche $\Rightarrow \dim \bar{C} = 1$.

• Se $P_1, \dots, P_5$ colineari allora $\Pi = L(P_1, P_2)$

certamente C è degenere e $C = \Pi + \nu$

con ν generica retta di $\mathbb{P}^2$

$\Rightarrow \dim \bar{C} = 2$.

$$A = [0:0:1] \quad B = [2:0:1] \quad C = [1:1:1] \in \mathbb{P}_C^2$$

a) $\Pi = \{e \mid A, B, C \in \text{supp}(e), e \text{ tangente a } Y-Z=0 \text{ e } \text{è un fascio}\}$

C ha eq. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$

Imponiamo il passaggio per A, B, C :

$$\begin{cases} C=0 \\ A=-E \\ B=-(2D+E+2F) \end{cases}$$

C: $-Ex^2 - (2D+E+2F)y^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$

C ∩ Π: $-Ex^2 - (2D+E+2F)y^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$

$$Ex^2 - 2(D+E)xy + (2D+E)y^2 = 0$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (D+E)^2 - E(2D+E) = D^2 + 2DE + E^2 - 2DE - E^2 = D^2 = 0$$

Tangente a $Y-Z=0 \Leftrightarrow D=0$

La condizione lineare $\Rightarrow \exists e$ un fascio.

$$C_2: x^2 + y^2 - 2xz = 0$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E & F \\ E & -E & 0 \\ F & 0 & -(E+2F) \end{pmatrix}$$

$$C \text{ degenera} \Leftrightarrow \det F = 0 \Leftrightarrow E(E+F)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} E=0 \\ E+F \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow 2 \text{ - Curvuri degenerate } C_i: y(y-z)=0$$

$$\begin{cases} y(y-z)=0 \\ x^2 + y^2 - 2xz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x(x-2z)=0 \\ y=z \\ (x-z)^2=0 \end{cases}$$

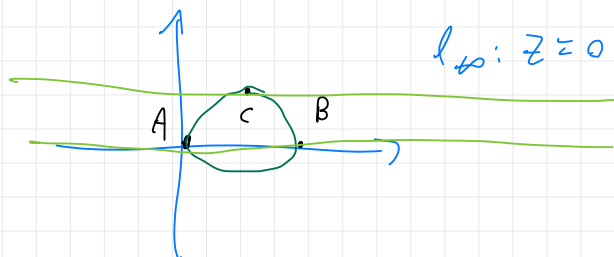
$$(x-y)(2z-x-y)=0$$

$$A = [1:0:0]$$

$$B = [1:2:0]$$

$$C = [1:1:-1]$$

$$C_1 \cap C_2 = \{A, B, C, C\}$$



c) $A=0$ per la tangente

$$\Rightarrow D^2 - 4ED - 4F = 0$$

$\Rightarrow$ ~~NON~~ $\bar{C}$ è un vett. lineare.

d) $C \in \{y-z=0\}$

mentre $A, B, C \notin \{y+z=0\}$

Tangente per punto base del fascio

$\hookrightarrow$ da condizione lineare

Tangente per un punto non base
in genere NON da una condizione lineare.

e) $y-z=0$ retta all'infinito

$$y-z \neq 0$$

$\Rightarrow$ normalizziamo

$$y-z=1$$

$$\mathbb{P}^2_{\setminus H} \longrightarrow \mathbb{A}^2$$

$$[x, y, z] \mapsto \left[\frac{x}{y-z}, \frac{y}{y-z} \right]$$

$$[1:t:t+1] \longleftarrow (1, t)$$

Usate queste formule e trovate una parabola non deg.

ES 3 ESANE 08/07/2021

$$\Gamma = \{C \mid C \text{ tangente a } \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4\}$$

2) opioni:

1) improve le condizioni e si vede che sono condizioni NON lineari.

$\Rightarrow$ NON è un fascio.

2) Per avere $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ tangenti a conica degenera

— semplice: impossibile

— doppiamente: ogni conica doppiamente degenera ha parte di Γ

Se fosse fascio: $\{x^2=0\} \in \Gamma$, $\{y^2=0\} \in \Gamma$

$\Rightarrow$ anche $\{x^2-y^2=0\} \in \Gamma \iff$ in quanto

$x^2-y^2 = (x-y)(x+y) = 0$ è compl. degenera.