

(2)

Def: Chiamiamo "polriti" rispetto alla quadrica non deg. Q

l'applicazione $\mathbb{P}_k^n \xrightarrow{\pi_Q} (\mathbb{P}_k^n)^*$
 $P \mapsto H_P := \{x = [x_0 : \dots : x_n] / tPA \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0\} \subset \mathbb{P}_k^n$
 iperpiano

Oss: se $\beta: k^{n+1} \times k^{n+1} \rightarrow k$ è la f. bil. sim.

indotta dalla matrice A della quadrica Q ,

π_Q è la trasform. proiettiva indotta da $\beta_1: k^{n+1} \rightarrow (k^{n+1})^*$.

Def: due punti $P, Q \in \mathbb{P}_k^n$ si dicono coniugati rispetto a Q

se $P \in H_Q$ (equivalentemente se $Q \in H_P$),

e si denota $P \perp Q$. H_P si denota con $P^\perp$ e si dice "iperpiano polare di P ", e P si dice "polo dell'iperpiano $P^\perp$ ".

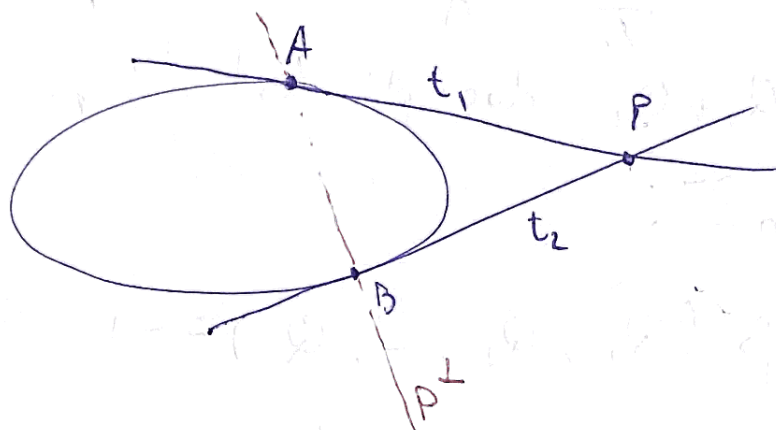
Oss: $P \in H_P$, cioè $P \perp P$, se e solo se $P \in \text{Supp}(Q)$

(se e solo se $P = [v]$ con $v \in I_P(k^{n+1})$),

in questo caso $P^\perp = T_P Q$ è l'iperpiano tangente.

Costruzione geometrica: Sia C una conica non-deg. in $\mathbb{P}^2$ ③

Sia $P \in \mathbb{P}^2 / P \notin \text{Supp}(C)$.



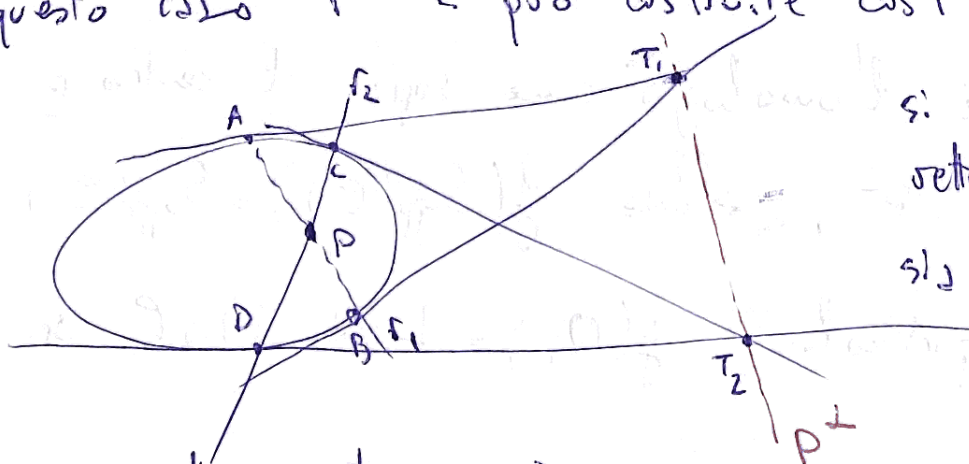
Allora $C_P(C) = t_1 + t_2$ e, sia $A = t_1 \cap \text{Supp}(C)$
 $B = t_2 \cap \text{Supp}(C)$

$$C_P(C) \cap \text{Supp}(C) = \{A, B\} = \text{Supp}(C) \cap P^\perp$$

Quindi $P^\perp = L(A, B)$

Attenzione: Se $k = \mathbb{R}$ potrebbe essere che $\text{Supp}(C_P(C)) = \emptyset$
 cioè t_1, t_2 sono due rette complesse!

In questo caso $P^\perp$ si può costruire così:



si prendono 2
 rette r_1, r_2 per P .

sia $r_1 \cap \text{Supp}(C) = \{A, B\}$

$r_2 \cap \text{Supp}(C) = \{C, D\}$

$$t_A \cap t_B = T_1$$

$$t_C \cap t_D = T_2$$

$$\text{allora } T_1^\perp = L(A, B) \ni P$$

$$T_2^\perp = L(C, D) \ni P$$

$$P \in T_1^\perp \cap T_2^\perp \Rightarrow T_1, T_2 \in P^\perp$$

$$\Rightarrow P^\perp = L(T_1, T_2)$$

(4)
[Ex] Sia C una conica non degenera in $\mathbb{P}^2$,

Sia $P \notin \text{Supp}(C)$ un punto in $\mathbb{P}^2$.

Sia $l \in r$ retta non tangente a C ,

• sia $r \cap C = Q_1 + Q_2$ due pt. distinti,

e sia $Q = r \cap l^\perp$.

i) Mostrare che $\beta(Q_1, Q_2, P, Q) = -1$

ii) Dato un punto $P \in \mathbb{P}^2$, una retta l , mostrare
che esiste un'unica omologia $f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ di
centro P , tale che $\forall Q \in \mathbb{P}^2$ non fisso da f
si ha $\beta(Q, f(Q), P, l \cap L(Q, f(Q))) = -1$.

Mostrare che questa è un'involuzione.

iii) Se l è una retta non tangente a C ,

e $P \in \mathbb{P}^2$ è il polo di l (rispetto a C)

e f è l'omologia come sopra di centro P e

tale che $l = l^\perp$, allora $f(\text{Supp}(C)) = \text{Supp}(C)$,

e in particolare $f(Q_1) = L(Q_1, P) \cap C$ se $Q_1 \in \text{Supp}(C)$.

§ 3.9 Quadriche Rigate

①

Abbiamo visto l'applicazione $\Phi: \mathbb{P}' \times \mathbb{P}' \longrightarrow \mathbb{P}^3$
 $([x_0:x_1], [y_0:y_1]) \longmapsto [x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1]$

Abbiamo mostrato che è iniettiva con immagine

$\text{Im}(\Phi) = \text{Supp}(Q)$ dove $Q: w_0 w_3 - w_1 w_2 = 0$ è

una quadrica non degenera in $\mathbb{P}^3$.

$\Phi^{-1}: \text{Supp}(Q) \longrightarrow \mathbb{P}' \times \mathbb{P}'$ mappa inversa

$$[w_0:w_1:w_2:w_3] \longmapsto ([w_0:w_2], [w_0:w_1])$$

" " "
[w_1:w_3] [w_2:w_3]

Osserviamo che tramite il cambio di coordinate

$$w_0 = z_0 + z_2 \quad w_1 = z_1 + z_3 \quad w_2 = z_1 - z_3 \quad w_3 = z_0 - z_2$$

la eq. della quadrica diventa $Q: z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0$

(forme più o meno canonica!).

L'applicazione Φ definisce 2 schiere di rette

sulla quadrica, in ogni schiera le rette sono

2 a 2 sghembe, e ogni retto di una schiera

è incidente a tutte le rette dell'altra schiera,

(2)

fissando $[x_0:x_1]$, $\Phi([x_0:x_1] \times \mathbb{P}^1)$ è la retta

$$\left\{ [y_0(x_0, 0, x_1, 0) + y_1(0, x_0, 0, x_1)] \mid [y_0:y_1] \in \mathbb{P}^1 \right\} = \\ = L([x_0:0:x_1:0], [0:x_0:0:x_1])$$

analogamente

$$\Phi(\mathbb{P}^1 \times [y_0:y_1]) = L([y_0:y_1:0:0], [0:0:y_0:y_1])$$

è una retta.

Verifichiamo che dati $[x_0:x_1] \neq [x'_0:x'_1]$ le corrispondenti rette sono sghembe: se non lo fossero, i punti corrispondenti appartenerebbero ad uno stesso piano, ma

$$\begin{vmatrix} x_0 & 0 & x'_0 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & x'_0 \\ x_1 & 0 & x'_1 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x'_1 \end{vmatrix} = x_0 \begin{vmatrix} x_0 & 0 & x'_0 \\ 0 & x'_1 & 0 \\ x_1 & 0 & x'_1 \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} 0 & x'_0 & 0 \\ x_0 & 0 & x'_0 \\ x_1 & 0 & x'_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_0 x'_1 - x_1 x'_0)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & x'_0 \\ x_1 & x'_1 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi le rette di uno schiero sono 2 a 2 sghembe, stessa cosa per l'altro schiero.

Chiusamente $\Phi([x_0:x_1] \times \mathbb{P}^1) \cap \Phi(\mathbb{P}^1 \times [y_0:y_1]) =$

$$= \Phi([x_0:x_1], [y_0:y_1]) \Rightarrow \text{sono incidenti in un punto!}$$

Affinizziamo la quadrica Q :

③

• Nelle coordinate (z_0, z_1, z_2, z_3) $Q: z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0$

Sia $\pi_\infty: z_3 = 0$ $Q \cap \pi_\infty: z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = 0$ conica non degenera

e $Q \cap \overset{U_3}{\underset{[z_3=1]}{\mathbb{A}^3}}: x^2 + y^2 - z^2 = 1$

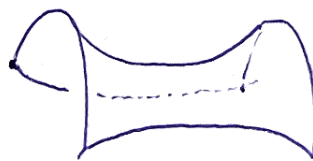


iperboloida
iperbolico $(\mathbb{R})$

• Nelle coordinate (w_0, w_1, w_2, w_3) $Q: w_0 w_3 - w_1 w_2 = 0$

$\pi_\infty: w_0 = 0$ $Q \cap \pi_\infty: w_1 w_2 = 0$ conica degenera

$Q \cap \overset{U_0}{\underset{[w_0=1]}{\mathbb{A}^3}}: z - xy = 0$



iperboloida
iperbolico
 $(\mathbb{R})$

In entrambi i casi, sia $P \in \text{Supp}(Q \cap \mathbb{A}^3)$

consideriamo $T_P \cap \mathbb{A}^3$ l'iperpiano tangente:

poiché Q è non degenera $T_P \not\subset Q$, però

le due rette r_P, s_P per P delle due schiere

sono incluse in $\text{Supp}(Q)$, e poiché quindi

$$m(P, m_P, Q) = m(P, s_P, Q) = \infty$$

(4)

esse sono rette tangenti incluse in Q .

L'equazione di Q , ristretta a T_P è una conica nel piano T_P , ed è quindi la

conica degenera $r_P + s_P$, cioè $T_P \cap \text{Supp}(Q) = r_P \cup s_P$

Stessa cosa nel caso affine.

(EX) Mostrare che date 3 rette sghembe (2 a 2)
(in A^3 o in P^3) esiste un'unica quadrica rigata
 Q che le contiene tutte e 3, e che questa
è l'unione delle rette secanti: le 3 rette sghembe,
con le 3 rette in una schiera e le secanti in
un'altra schiera.

Mostrare che nel caso affine la quadrica è
un paraboloide iperbolico o un iperboloido iperbolico
a seconda che le 3 rette sghembe siano

contenute in 3 piani tra loro paralleli o meno.
(e i punti impropri siano allineati o meno)