

(2)

$$\text{II)} \quad k = \overline{k} \quad f(x, y) \in k[x, y]_d = \langle x^d, x^{d-1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d \rangle$$

$$f(x, y) = a_0 x^d + a_1 x^{d-1} y + \dots + a_{d-1} x y^{d-1} + a_d y^d =$$

$$= x^d \left(a_0 + a_1 \frac{y}{x} + a_2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + \dots + a_d \left(\frac{y}{x} \right)^d \right)$$

$$\text{sic} \quad d' = \max \{ d \mid a_p \neq 0 \} = \deg \left(a_0 + \dots + a_d \left(\frac{y}{x} \right)^d \right)$$

$a_1, \dots, a_d$ radici (multiple)

$$\text{allora} \quad f(x, y) = a_{d'} x^d \prod_{j=1}^{d'} \left(\frac{y}{x} - \alpha_j \right) =$$

$$= a_{d'} x^{d-d'} \prod_{j=1}^{d'} (y - \alpha_j x)$$

$\Rightarrow$ ogni polinomio omogeneo di grado d in x, y
 è un prodotto di d polinomi lineari omogenei

III)

Molteplicità:

$$k = \bar{k}$$

③

$\mathcal{V} = [F]$ ipersuperficie $F(x_0, \dots, x_n) \in k[x_0, \dots, x_n]_d$

$$\ell = L(P, Q) = \{ [\lambda v + \mu w] / [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1 \} \quad P = [v], Q = [w]$$

$\tilde{F}(\lambda, \mu) = F(\lambda v + \mu w)$ pol. omogeneo in λ, μ grado d

$$\Rightarrow \tilde{F}(\lambda, \mu) = \sum (\alpha_i \lambda + \beta_i \mu)^{m_i} \quad (\alpha_i \lambda + \beta_i \mu)^{m_i} \dots (\alpha_k \lambda + \beta_k \mu)^{m_k}$$

con $m_1 + m_2 + \dots + m_k = d$ $[\alpha_i : \beta_i]$ distinti.

Allora $\tilde{F}(\lambda, \mu)$ è annulla in $[\beta_1 : -\alpha_1], \dots, [\beta_k : -\alpha_k]$
con molteplicità $m_1, \dots, m_k$

Se $P = [\beta_1 v - \alpha_1 w]$ diciamo che

$$m(P, \ell, [F]) = m_1.$$

Allora se $m(P, \ell, [F]) \geq k$ con $P = [\beta v - \alpha w]$

$$\Rightarrow \tilde{F}(\lambda, \mu) = (\alpha \lambda + \beta \mu)^k \tilde{\tilde{F}}(\lambda, \mu)$$

Ora prendiamo $G(x_0, \dots, x_n) \in k[x_0, \dots, x_n]_d$

e supponiamo che $m(P, \ell, [G]) \geq k$

quindi anche $\tilde{G}(\lambda, \mu) = G(\lambda v + \mu w) = (\alpha\lambda + \beta\mu)^k \tilde{G}(\lambda, \mu)$

Quindi per ogni combinazione lineare

$$G_{\gamma, \delta}(x_0, \dots, x_n) = \gamma F(x_0, \dots, x_n) + \delta G(x_0, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned} G_{\gamma, \delta}(\lambda v + \mu w) &= \tilde{G}_{\gamma, \delta}(\lambda, \mu) = \gamma \tilde{F} + \delta \tilde{G} = \\ &= \gamma (\alpha\lambda + \beta\mu)^k \tilde{F} + \delta (\alpha\lambda + \beta\mu) \tilde{G} = \\ &= (\alpha\lambda + \beta\mu)^k (\gamma \tilde{F} + \delta \tilde{G}) \end{aligned}$$

quindi $m(P, l, [G_{\gamma, \delta}]) \geq k //$

Quindi se $\mathcal{F}$ è un fascio di coniche in $\mathbb{P}^2$
l una retta, $P \in \mathbb{P}^2$,

se $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}$ distinte (quindi $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$)
sono tali che $m(P, l, \mathcal{C}_1) \geq k$ e $m(P, l, \mathcal{C}_2) \geq k$

allora $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{F} \quad m(P, l, \mathcal{C}) \geq k //$

IV Ora sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche in $\mathbb{P}_k^3$
($k=\bar{k}$). Sappiamo che c'è una conica

degenera in $\mathcal{F}$, chiamiamola $D = l_1 + l_2$.

Dato un'altra conica C in $\mathcal{F}$ t.c. $l_1, l_2 \notin C$

chiamiamo $C \cdot D = C \cdot l_1 + C \cdot l_2 = A + B + C + D$

dove $C \cdot l_1 = A + B$ intersezione di retta l_1 con conica C
con molteplicità

e $C \cdot l_2 = C + D$ "

Allora, ogni conica C in $\mathcal{F}$ ha intersezione

$$C \cdot D = A + B + C + D \quad ?$$

infatti se $A \in \text{Supp}(C) \cap l_1$ allora

$$m(A, l_1, C) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{e } m(A, l_1, D) = \infty > 2$$

$$\Rightarrow m(A, l_1, C_{r,d}) \geq m(A, l_1, C)$$

e questo per $A, B, C, D \in \text{Supp}(C) \cap \text{Supp}(D)$

(6)

Osservazione: questo vale anche se C stessa
è una conica degenera.

Quindi possiamo dire che, dato un fascio $\mathcal{F}$ di
coniche in $\mathbb{P}^2$, l'intersezione di una conica
 C del fascio $\mathcal{F}$ con una conica degenera D
del fascio (che non abbiano "rette in comune")
non dipende da C e D ma solo dal fascio.

Chiamiamo questa intersezione "luogo base del
fascio $\mathcal{F}$ " e denotiamo con $C \cdot D = A+B+C+D$
(punti contati con molteplicità).

Def: Date 2 coniche $C_1 \neq C_2$ senza rette
in comune, definiamo l'intersezione
 $C_1 \cdot C_2 = A+B+C+D$ come il luogo base del
fascio $\mathcal{F} = \mathcal{F}(C_1, C_2)$. Si tratta di 4 punti
(contati con molteplicità).

Osservazione: per calcolare $C_1 \cdot C_2$ basta scegliere
una conica degenera $D \in \mathcal{F}(C_1, C_2)$ e interseccarla con C_1 (C_2).

(7)

Dato un fascio qualsiasi $\mathcal{F}$ di coniche in $\mathbb{P}^2$,
e data $D = l_1 + l_2$ una conica degenera di $\mathcal{F}$,
abbiamo 2 possibilità:

- i) esiste un'altra conica (degenera) $D' = l_1 + l_3$
che ha una retta in comune con D
- ii) Ogni altra conica $C \in \mathcal{F}$ con $C \neq D$ non
ha rette in comune con D .

- Nel caso (i) tutte le coniche del fascio $\mathcal{F}$
sono degeneri e il fascio è ottenuto come
$$\mathcal{F} = \{ D' = l_1 + l, \text{ con } l \in L(l_2, l_3) \subset \mathbb{P}^2 \}$$

e diciamo che il fascio $\mathcal{F}$ ha la retta l_1 come luogo base.

- Nel caso (ii) abbiamo visto che ci sono
4 punti (contati con molteplicità) $A+B+C+D$ e
il luogo base è $A+B+C+D$ e corrisponde all'intersezione
di una qualsiasi altra conica $C \in \mathcal{F}$ con D .

⑧

Descriviamo ora i fasci $\mathcal{F}$ di coniche in $\mathbb{P}^2_k$
in base al loro luogo base.

② $Bs(\mathcal{F}) = A+B+C+D$ con A, B, C, D 4 punti distinti.

abbiamo visto: in questo caso $\mathcal{F}$ è il fascio

di tutte le coniche per A, B, C, D . (sono in pos. gen.)
Contiene 3 coniche degeneri: (Ex quali?)

③ $Bs(\mathcal{F}) = A+A+B+C$

In questo caso: 3 punti A, B, C non sono
allineati. (altrimenti tutte le coniche conterebbero
la retta per A, B, C).

$\exists$ retta t_A per A ---