PROIETTIVO

ES. 4 FOGLIO 10

$\mathcal{C}: \ x_0^2 + 4x_0x_1 + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2$$

$\mathbb{E}' = \{ e_0, \ e_1 - 2e_0, \ e_2 \}$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}'' = \{ e_0, \ e_1 - 2e_0, \ e_2 - e_1 + 2e_0 \}$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{segnatura } (2,0)$$

$\mathcal{D}: \ x_0^2 + x_1^2 = 0$

$RP(\mathbb{E}'')$ rif. proiettivo in cui $\mathcal{C}$ è canonica

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow f$$

$x_0 \overset{*}{=} x_0' - 2x_1' + 2x_2'$

$x_1 \overset{*}{=} x_1' - x_2'$

$x_2 \overset{*}{=} x_2'$

ES 2 FOGLIO 10)

$\mathcal{C}_1 : 2x_0^2 - x_1^2 = 0$ $\qquad$ $\mathcal{C}_2 : x_1^2 - 3x_2^2 = 0$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$$

entrambe hanno segnatura $(1,1)$ quindi sono proiettivamente equivalenti a $D : x_0^2 - x_1^2 = 0$

$$\mathcal{C}_1 \underset{p}{\sim} D \underset{p}{\sim} \mathcal{C}_2$$

Con Lagrange possiamo determinare due proiettività C_1 e C_2 tali che

$$C_1^t A_1 C_1 = C_2^t A_2 C_2 = D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = ({}^tC_2)^{-1} C_1^t A_1 C_1 C_2^{-1} = {}^t(C_1 C_2^{-1}) A_1 C_1 C_2^{-1}$$

$$\Pi = C_1 C_2^{-1} \implies A_2 = \Pi^t A_1 \Pi$$

Π è la proiettività cercata.

Base in cui $\mathcal{C}_1$ è canonica:

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_0, e_1, e_2 \right\}$$

Base di cui $\mathcal{C}_2$ è canonica:

$$F_2 = \left\{ e_1 , \frac{1}{\sqrt{3}} e_2 , e_0 \right\}$$

$$\Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Pi = C_1 C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{x}) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 : \sqrt{3} x_2 : x_0 \right]$$

AFFINE

ES 11 FOGLIO 10

$$x^2+y^2-2xy-4x+4y+6=0$$

(i)

$$A=\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$\det A = 0$ $\quad rg A = 2$

$\det A_0 = 0$ $\quad rg A_0 = 1$

① Parabola semplicemente degenere

② a punti immaginari

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad \{e_1+e_2,\ e_1\}$$

$$\Pi_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad A_1=\begin{pmatrix}6 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Pi_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$y'^2+2=0 \rightsquigarrow y''=\sqrt{2}\,y' \qquad y''^2+1=0$$

$$\Pi_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$M = M_1 M_2 M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x = (x' + \sqrt{2}\, y') + 2 \\ y = x' \end{cases}$$

ES 16 FOGLIO 10

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \det A &= 0 \\ rg\, A &= 2 \\ \det(A_0) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ è parabola semplicemente degenere a punti reali

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y'^2 - 1 = 0$$

• RETTE

$$y'^2 - 1 = 0 \iff (y'+1)(y'-1) = 0$$

$$M = M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = x' + y' - 1 \\ y = x' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x' = y \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$$

Le due rette in cui $\mathcal{C}$ si spezza sono

$$r_1 : y' + 1 = 0 \iff r_1 : x - y + 2 = 0$$
$$r_2 : y' - 1 = 0 \iff r_2 : x - y = 0$$

Alternativamente:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y = 0$$
$$(x-y)^2 + 2(x-y) = 0$$
$$(x-y)(x-y+2) = 0$$

PUNTO IMPROPRIO

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy \cancel{+2xx_0} \cancel{-2xx_0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ (x-y)^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = 0 \\ x = y \end{cases} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ES 18 FOGLIO 10

$$xy - 3x - 2y + 4 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow rg A = 3$

$\det A_0 = -\frac{1}{4} < 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ è una iperbole generale.

PUNTI IMPROPRI

$$\begin{cases} x_1 x_2 - 3x_1 x_0 - 2x_2 x_0 + 4x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 x_2 = 0 \end{cases} \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CENTRO

$$A_0 \underline{x} + \underline{a} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

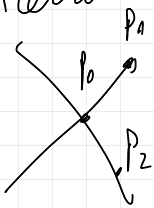
$$\begin{cases} \frac{1}{2} y - \frac{3}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = 3 \\ x = 2 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \text{centro } P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ASINTOTI : rette per il centro e un punto improprio

r_1 retta per P_0, Q_1: $x = 2$ $\qquad$ r_2: $y = 3$

ES 21 FOGLIO 10

Una conica degenere a centro sono due rette eventualmente coincidenti,



In questo caso P_0, P_1, P_2 NON sono allineati $\Rightarrow$ la conica cercata è unica ed è la conica formata dalle rette per P_0 e P_1 e per P_0 e P_2

$$\underbrace{((2i+1)x - y - 1)}_{\text{retta } P_0, P_1} \underbrace{(x - y - 1)}_{\text{retta } P_0, P_2} = 0$$

EUCLIDEO

ES 24 FOGLIO 10

$$x^2+y^2-2xy-4x+4y+6=0$$

Sappiamo già che è una parabola semplicemente degenere a punti immaginari:

$$Y^2+\theta^2=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

pol. car. $x(x-2)$

$\lambda_1 = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad A_1=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2(y'^2+1)=0 \rightsquigarrow \boxed{a=1}$$

$$M = M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad g: \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')+1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')-1 \end{cases}$$

M_0

SDR euclideo

$$\mathbb{F} = \mathbb{E} M_0 \qquad O' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ES 32 FOGLIO 10

$$x^2+y^2+6xy+\frac{16}{\sqrt{2}}x=0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8/\sqrt{2} & 0 \\ 8/\sqrt{2} & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = 32 \Rightarrow rg A = 3$$

$$\det A_0 = -8 < 0$$

$\mathcal{C}$ è una iperbole generale

$$D \sim \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

polinomio car $(x-4)(x+2)$

$$\lambda_1 = 4 \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x'^2}{2} - y'^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$M = M_1 M_2 M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \\ -3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y' + 1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y' - 3) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) + 2 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) + 1 \end{cases}$$

CENTRO

In forma canonica il centro è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Il centro è $P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

ASINTOTI $\quad x' \pm \frac{a}{b} y' = 0 \iff \begin{matrix} x' - \sqrt{2}\, y' = 0 \\ x' + \sqrt{2}\, y' = 0 \end{matrix}$

$r_1: \; -(1+\sqrt{2})x + (1-\sqrt{2})y + 2(\sqrt{2}-1) = 0$

$r_2: \; (\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}+1)y + 2(\sqrt{2}+1) = 0$

PUNTI IMPROPRI

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ES 39 FOGLIO 10

Cerchiamo il SdR RC' in cui $\mathcal{C}$ è in forma canonica

$$D: y^2 - 2px = 0$$

- $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma in forma canonica il vertice è l'origine $\Rightarrow RC'(V, E')$
- Asse in forma canonica è $\langle e_1' \rangle$

$$\Rightarrow e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Il vettore e_2' deve completare e_1' a una base ortonormale ed equiversa con la base canonica

$$\Rightarrow e_2' = e_1'^{\perp} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Quindi $E' = E\,C$ $\qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ è l'isometria che porta $\mathcal{C}$ in forma canonica.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') + 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') + 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \sqrt{2} \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases}$$

$Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ in RC $\rightsquigarrow$ $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ in RC'

In RC' $\mathcal{C}$ ha equazione $y^2 - 2px = 0$

Imponendo il passaggio per Q:

$$8 - 2p\sqrt{2} = 0 \Rightarrow p = 2\sqrt{2}$$

$$y'^2 - 4\sqrt{2}\,x' = 0$$

In RC

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$$