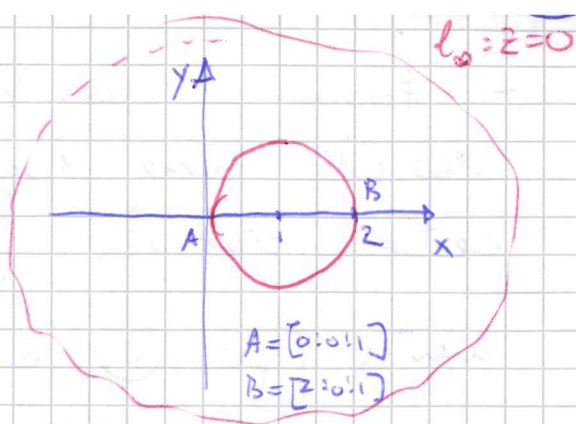


Esempi / Esercizi:

Sia $C_2: x^2 + y^2 - 2xz = 0$



- Trovare i fasci $\mathbb{F}(C_1, C_2)$ e le intersezioni C_1, C_2 (con molteplicità) per C_1 nei seguenti casi (degeneri).

i) $C_1: x(x-2z) = 0$ (d)

ii) $C_1: xy = 0$ (e)

iii) $C_1: x^2 = 0$ (f)

- Descrivere le coniche degeneri in $\mathbb{F}(C_1, C_2)$

- Descrivere (e disegnare) l'intersezione $C_2 \cap C_3$ con C_3 una conica non degenera in $\mathbb{F}(C_1, C_2)$.

② $C_{\lambda, \mu}: (\lambda + \mu)x^2 + \mu y^2 - 2(\lambda + \mu)xz = 0$

$$A_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 & \lambda + \mu \\ 0 & \mu & 0 \\ \lambda + \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

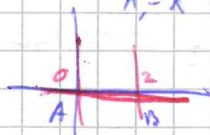
$$C_1 \cap C_2 = \{A, A, B, B\}$$

$$C_1 = l_1 + l_2 \quad \begin{matrix} l_1: x=0 \\ l_2: x-2z=0 \end{matrix}$$

$$A = [0:0:1] \\ B = [2:0:1]$$

$$\det A_{\lambda, \mu} = \mu(\lambda + \mu)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 & C_{1,0} = C_1 \text{ degenera} \\ \mu = -\lambda & C_{\lambda, -\lambda}: y^2 = 0 \end{cases}$$

$y^2 = 0$ è la linea $l_3 + l_3$ con $l_3: y=0$



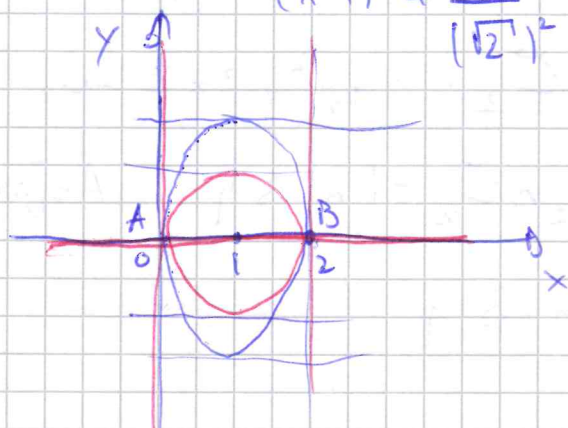
prendiamo $\mathcal{C}_3$ non degenera in $\mathbb{P}^2$:

$$\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_{11}: 2x^2 + y^2 - 4xz = 0$$

$$2(x-z)^2 + y^2 - 2z^2 = 0$$

Affine (j_3) $2(x-1)^2 + y^2 = 2$

$$(x-1)^2 + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} y^2 = 1$$



Per costruzione $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, A, B, B\}$

Le soluzioni saranno il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xz = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4xz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 0 \\ 4x^2 - 2xz = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}^2$ sono tutte le rette coniche per A, B,
tangenti a $x=0$ in A e a $x-2z=0$ in B.

$$\textcircled{10} \quad C_{\lambda, \mu}: \lambda x^2 + \lambda y^2 + 2\mu xy + 2\lambda xz = 0$$

$$A_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & -\lambda \\ \mu & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_{\lambda, \mu}) = -\lambda^3$$

Una sola degenera: $C_1: xy = 0 \quad C_1 = l_1 + l_2$

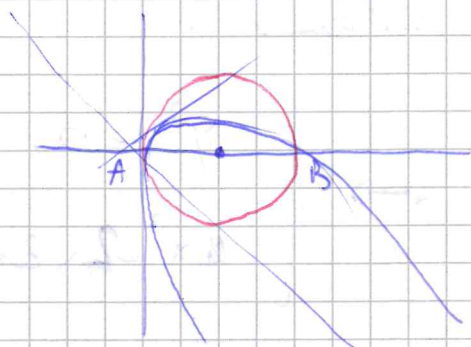
$$l_1: x=0 \quad l_2: y=0 \quad C_2: x^2 + y^2 - 2xz = 0$$

$$l_1 \cap C_2 = \{A, A\} \quad l_2 \cap C_2 = \{A, B\} \quad A = [0:0:1] \quad B = [2:0:1]$$

$$\rightarrow C_1 \cap C_2 = \{A, A, A, B\}$$

$$\text{Sia } C_3: x^2 + y^2 + 2xy - 2xz = 0$$

Affine $(x+y)^2 - 2x = 0$ parabola



$$C_2 \cap C_3 = \{A, A, A, B\}$$

sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xz = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy - 2xz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 + y^2 - 2xz = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y^2=0 \end{cases} \{A, A\} \\ \begin{cases} y=0 \\ x(x-2z)=0 \end{cases} \{A, B\}$$

iii) $\mathcal{C}_{\lambda, \mu}: (\lambda + \mu)x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda xz = 0$

$$A_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_{\lambda, \mu}) = -\lambda^3$$

Une seule dégénère: $\mathcal{C}_1: x^2 = 0$ $\mathcal{C}_1 = l + l$ $l: x = 0$

$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2: l \cap \mathcal{C}_2: \begin{cases} x=0 \\ y^2=0 \end{cases} \quad l \cap \mathcal{C}_2 = \{A, A\}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, A, A, A\}$

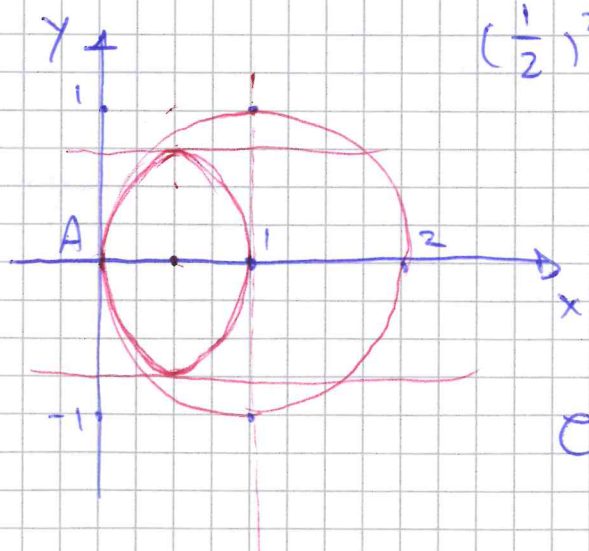
prendons $\mathcal{C}_3: 2x^2 + y^2 - 2xz = 0$

Affine (j_3): $2x^2 + y^2 - 2x = 0$

$2(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{2} = 0$

$4(x - \frac{1}{2})^2 + 2y^2 = 1$

$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$



$\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, A, A, A\}$

In generale, se abbiamo 2 coniche C e D ,
come definiamo $C \cap D$?

Consideriamo $\mathbb{P}(C, D)$, questo contiene una
conica degenera $l_1 + l_2$, allora per l'osservazione

Se $C \cap (l_1 + l_2) = \{A, B, C, D\}$ (con molteplicità)

anche $D \cap (l_1 + l_2) = \{A, B, C, D\}$

quindi poniamo $C \cap D = \{A, B, C, D\}$.

Note che sono sempre 4 punti contati con mult.



(5+)

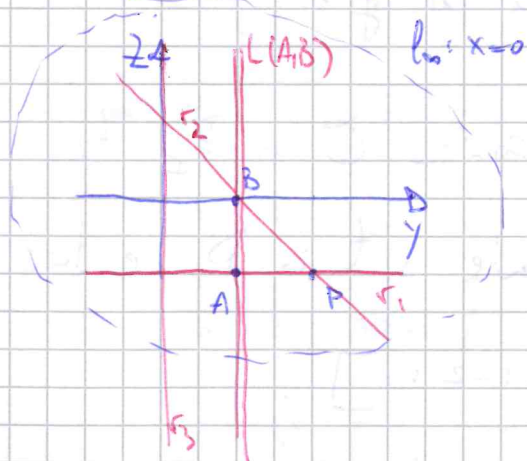
Ex 1) Si determini, se esiste, una conica C che soddisfi le seguenti proprietà:

- i) C è non degenera.
- ii) C è tangente alla retta $r_1: x+z=0$ nel punto $A=[1:1:-1]$
- iii) C è tangente alla retta $r_2: x-y-z=0$ in $B=[1:1:0]$
- iv) C è tangente alla retta $r_3: y=0$.

Solgimento: Osserviamo che le proprietà ii) e iii) determinano un fascio, $\mathcal{F}$: sarà il fascio ottenuto interpolando

2 coniche degeneri: $C_1 = r_1 + r_2$ e $C_2 = L(A,B) + L(A,B)$

$$r_1 \cap r_2 = P = [1:2:-1] \quad L(A,B): x-y=0$$



$$C_1: (x+z)(x-y-z)=0 \quad x^2 - z^2 - xy - yz$$

$$C_2: (x-y)^2=0 \quad x^2 - 2xy + y^2$$

$$\mathcal{F} \ni C_{\lambda, \mu}: (\lambda+\mu)x^2 + \mu y^2 - \lambda z^2 - (\lambda+2\mu)xy - \lambda yz = 0$$

$$C_{\lambda, \mu} \cap r_3, \text{ dove } r_3: y=0$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu)x^2 - \lambda z^2 = 0$$

$\lambda=0$ punto doppio
 $\lambda=-\mu$ punto doppio
 $\lambda \neq 0, -\mu$ 2 punti distinti

$$\lambda=0 \Rightarrow C_{\lambda, \mu} = C_2 \text{ singolare}$$

$$\lambda=-\mu \Rightarrow C_{\lambda, \mu} = C_{-1,1}: y^2 + z^2 - xy + yz = 0$$

$$C_{-1,1}: y^2 + z^2 - xy + yz = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = -1/4 \neq 0 \Rightarrow \text{Non degenera}$$



Ex 2 Considerare in $\mathbb{P}_C^2$ le rette

$$r: z=0, s: x-2z=0, t: y=0, l: x-z=0$$

$$\text{e i punti: } P=r \cap t, Q=t \cap l, A=l \cap r, R=[2:-1:1]$$

a) Costruire, se esiste, una proiettività f di $\mathbb{P}_C^2$ t.c.

$$f(r)=s, f(l)=l, f(t)=t, f(R) \in [x+y=0]$$

e t sia l'unica retta per P stabile per f .

b) Determinare, se esiste, una conica C in $\mathbb{P}_C^2$ t.c.

C sia tangente a l in A e tangente a t in P e t.c.

$f(C)$ passi per il punto $[2:-2:1]$.

Svolgimento: $P = r \cap t = [1:0:0]$ $Q = t \cap l = [1:0:1]$

$A = l \cap r = [0:1:0]$, possiamo $B = l \cap s = [1:2:1]$

Osserviamo che $P \in r, s, t$, e $P \notin l$. $R = [2:-1:1]$

Cerchiamo f tale che $f(r) = s$, $f(l) = l$, $f(t) = t$

$$\Rightarrow f(A) = B \quad P = r \cap t = s \cap t \Rightarrow f(P) = P.$$

Inoltre $f(Q) = Q$

$\Rightarrow f$ ha matrice del tipo $M = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 2b & d \\ 0 & b & e \end{pmatrix}$ con $b(2e-d) \neq 0$
[casi d,e]

$$f(Q) = Q \Rightarrow d=0 \quad e=1+c \quad \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & b & 1+c \end{pmatrix}$$

$$f(R) = [2-b+c : -2b : -b+1+c] \in [x+y=0]$$

$$\Rightarrow c = 3b - 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b & 3b-2 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & b & 3b-1 \end{pmatrix}$$

rette per $P = [1:0:0]$ $r_{\lambda,\mu}: \lambda y + \mu z = 0$

$$S_{\lambda,\mu} = [0:\mu:-\lambda] \in r_{\lambda,\mu} = L(P, S_{\lambda,\mu})$$

$$t: y=0 \quad t = r_{1,0} = L(P, [0:0:1])$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu b + \lambda(2-3b) \\ 2b\mu \\ \mu b + \lambda(1-3b) \end{pmatrix} \in r_{\lambda,\mu} \Leftrightarrow 2b\lambda\mu + \mu^2 b + \lambda\mu - 3b\lambda\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu(-b\lambda + \mu b + \lambda) = 0$$

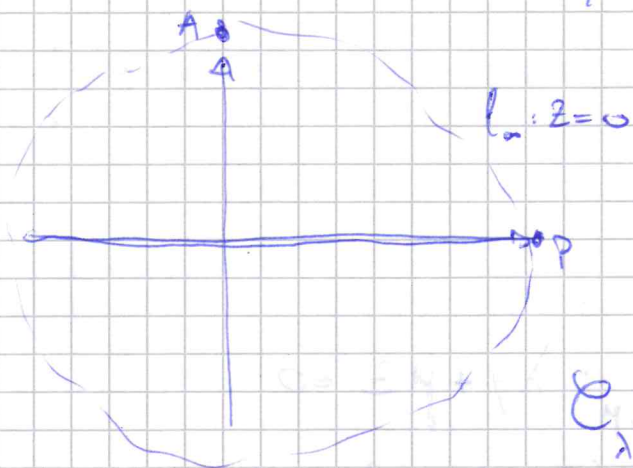
Quindi le rette stabili per P sono quelle con $\mu=0$ oppure con $\lambda(1-b) + \mu b = 0$.

Quindi solo la retta t è stabile per f quando $b=1$, infatti t è la retta con $\mu=0$: $y=0$.

$\Rightarrow$ C'è una sola proprietà che soddisfa le condizioni: quella con matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{5} //$$

⑥ $A = [0:1:0]$ $l: x-z=0$
 $P = [1:0:0]$ $t: y=0$ $\rightarrow f \rightarrow c$



Curve degeneri con

$$C_1: xy - yz = 0$$

$$C_2: z^2 = 0$$

$$C_{\lambda, \mu}: \mu z^2 + \lambda xy - \lambda yz = 0$$

$$f(c) \text{ passa per } [2:-2:1] \Leftrightarrow C \text{ passa per } f^{-1}[2:-2:1]$$

$$f(2:-1:1) = [2:-2:1]$$

cerchiamo $C_{\lambda, \mu}$ per $[2:-1:1]$: $\mu - 2\lambda + \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda$

$$\Rightarrow C_{\lambda, \mu}: z^2 + xy - yz = 0$$

Ex 3 In $\mathbb{P}_C^2$ considerare le coniche

$$C_1: 4xy - z^2 - 4y^2 = 0$$

$$C_2: xy + z^2 + 4y^2 - 5yz = 0$$

i) Si determinino tutte le coniche degeneri del fascio $\mathcal{F} = \mathcal{F}(C_1, C_2)$.

ii) Si calcoli $C_1 \cap C_2$ (con molteplicità)

iii) Si descrivano tutte le proietività $f: \mathbb{P}_C^2 \rightarrow \mathbb{P}_C^2$ t.c.

$$f([1:1:0]) = [1:1:0] \quad \text{e} \quad \text{che} \quad f(C) \in \mathcal{F} \quad \forall C \in \mathcal{F}.$$

Solgi:

i) $C_{\lambda, \mu}: 4(\mu - \lambda)y^2 + (\mu - \lambda)z^2 + 2(2\lambda + \mu/2)xy + 2(-5\mu/2)yz = 0$

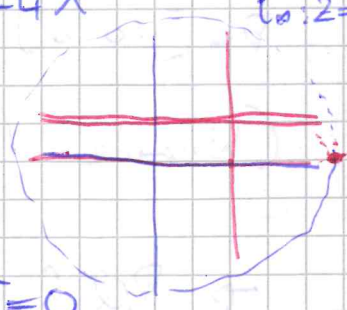
$$A_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda + \mu/2 & 0 \\ 2\lambda + \mu/2 & 4(\mu - \lambda) & -5\mu \\ 0 & -5\mu/2 & \mu - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{\lambda, \mu}) = (2\lambda + \mu/2)^2 (\mu - \lambda)$$

coniche degeneri con $\lambda = \mu$ e $\mu = -4\lambda$ l.o. z=0

$$D_1 = C_{1,1}: xy - yz = 0 \quad y(x-z) = 0$$

$$D_2 = C_{1,-4}: -20y^2 - 5z^2 + 20yz = 0 \quad (2y-z)^2 = 0$$



$$(ii) \quad \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{11} \cap \mathcal{C}_{11-L} = \left\{ [1:0:0], [1:0:0], [2:1:2], [2:1:2] \right\}$$

$$P = [1:0:0] \quad Q = [2:1:2] \quad L(P, Q) = 2y - z = 0$$

(iii) Una proiettività trasforma coniche degeneri in coniche degeneri (semplicemente e doppiamente corrisp.) e coniche non degeneri in coniche non degeneri.

Inoltre induce una proiettività dallo spazio di tutte le coniche ($\cong \mathbb{P}^5$). Quindi trasforma fasci di coniche in fasci di coniche.

$$\Rightarrow f(D_1) = D_1 \quad \text{e} \quad f(D_2) = D_2$$

$$\Rightarrow f(L(P, Q)) = L(P, Q)$$

$$r_1: y=0 \quad r_2: x-z=0 \quad D_1 = r_1 + r_2$$

$$r_1 \cap r_2 = [1:0:1] = R \quad f(R) = R$$

$$0 \quad f(P) = P \quad \text{e} \quad f(Q) = Q \quad \text{oppure} \quad f(P) = Q \quad \text{e} \quad f(Q) = P$$

$$\text{Inoltre per ipotesi} \quad f(S) = S \quad \text{dove} \quad S = [1:1:0]$$

$$P = [1:0:0] \quad Q = [2:1:2] \quad R = [1:0:1]$$

$$\text{Chiarante} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sono lin. indep., e } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow P, Q, R, S$ in pos. generale.

Ottimismo 2 proiettività:

$$\bullet f(P)=P, f(Q)=Q, f(R)=R, f(S)=S \rightarrow f = \text{id}.$$

$$\bullet f(P)=Q, f(Q)=P, f(R)=R, f(S)=S$$

è un' involuzione.

Troviamo la matrice:

$$P = [-1:0:0] \quad R = [2:0:2] \quad S = [1:1:0]$$

$$Q = U = [2:1:2] \quad \text{base } E' = E \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

In E' f ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C})$

$$f(Q)=P \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\alpha \\ 1+\beta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f(E') = E'B \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

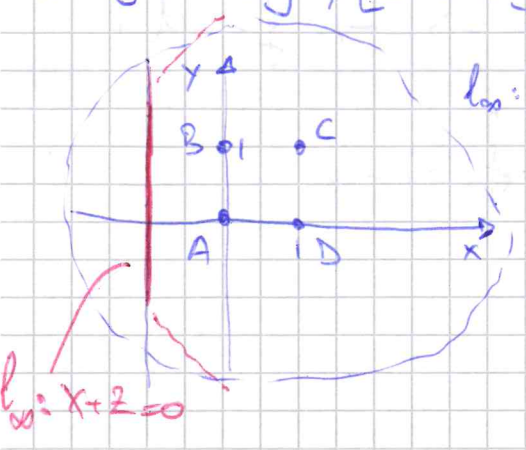
$$\Rightarrow E = E' \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E'H^{-1} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f \text{ ha matrice } f(E) = f(E'H^{-1}) = E'BH^{-1} = EHBH^{-1}$$

$$A = EHBH^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 4) Determinare il fascio delle coniche passanti in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

$A = [0:0:1], B = [0:1:1], C = [1:1:1], D = [1:0:1]$



$l_{\infty}: z=0$
 $L(A,B): x=0$
 $L(B,C): y-z=0$
 $L(C,D): x-z=0$
 $L(A,D): y=0$

$C_1: x^2-xz=0$
 $C_2: y^2-yz=0$
 $C_3: (x-y)(x+y-z)=0$
 $\quad \quad \quad L(A,C) \quad L(B,D)$

- i) Determinare ~~il~~ fascio, le coniche degeneri, il luogo base di $\mathcal{F}$.
- ii) Sia r la retta di equazione $z=0$.
Mostrare che per ogni punto P in r esiste un'unica conica per P , chiamiamola $C_{\lambda,\mu}(P)$.
- iii) Considerare l'applicazione $f: r \rightarrow r$ definita come $f(P) = \begin{cases} (C_{\lambda,\mu}(P) \cap r) \setminus \{P\} & \text{se } r \text{ non \u00e9 tangente a } C \\ P & \text{altrimenti} \end{cases}$
Possiamo scrivere $f(P) = (C_{\lambda,\mu}(P) \cap r) \setminus \{P\}$
Se $C_{\lambda,\mu}(P) \cap r = \{P, Q\}$ con molteplicit\u00e0
Mostrare che f \u00e8 una proiezione di r , e che $f^2 = \text{id}$.
- iv) Determinare tutte le coppie omogenee $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tali che nella retta affine $U = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{x_0 + y = 0\}$, $C_{\lambda,\mu}$ \u00e8 una parabola.

Svolgimento (i) $C_{\lambda, \mu} : \lambda x^2 + \mu y^2 - \lambda xz - \mu yz = 0$

(245)

$$A_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda/2 \\ 0 & \mu & -\mu/2 \\ -\lambda/2 & \mu/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{\lambda, \mu}) = -\lambda \frac{\mu^2}{4} - \mu \frac{\lambda^2}{4} = -\frac{1}{4} \lambda \mu (\lambda + \mu)$$

$$\Rightarrow |A_{\lambda, \mu}| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \mu = 0 \vee \lambda = -\mu$$

$$C_{1,0} = C_1 \quad C_{0,1} = C_2 \quad C_{1,-1} = C_3 : x^2 - y^2 - xz + yz = 0$$

$$C_1 \cap C_2 = C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_3 = \{A, B, C, D\}$$

(ii) $r = l_\infty : z = 0$ non contiene A, B, C, D

$\Rightarrow$ esiste per un punto di r imporre una condizione lineare sulle coeche del fascio $\Rightarrow$ una sola coeche lo soddisfa.

In pratica: Se $P = [x_0 : y_0 : 0] \in r$

$$\text{poniamo } \lambda x_0^2 + \mu y_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = y_0^2, \mu = -x_0^2$$

$$\Rightarrow C_{\lambda, \mu}(P) : y_0^2 X^2 - x_0^2 Y^2 - y_0^2 XZ + x_0^2 YZ = 0$$

(iii) Se $P = [x_0 : y_0 : 0]$ e $C_{\lambda, \mu} = C_{\lambda, \mu}(P)$

$$C_{\lambda, \mu}(P) \cap r : y_0^2 X^2 - x_0^2 Y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (y_0 X + x_0 Y)(y_0 X - x_0 Y) = 0$$

$$\Rightarrow C_{\lambda, \mu}(P) \cap r = \{[x_0 : y_0 : 0], [x_0 : -y_0 : 0]\}$$

Sono un solo punto (con molteplicità 2)

se e solo se r è tangente a $\mathcal{C}_{\lambda, \mu}(P)$,

se e solo se $P = [x_0 : y_0 : 0] = [x_0 : -y_0 : 0] = [-x_0 : y_0 : 0]$

se e solo se $P = [1 : 0 : 0]$ oppure $P = [0 : 1 : 0]$

In ogni caso $f : [x_0 : y_0 : 0] \mapsto [x_0 : -y_0 : 0]$
 è un' involuzione.

$$(i) \quad \text{Supp}(\mathcal{C}_{\lambda, \mu}) \cap U = \text{Supp}(\mathcal{C}_{\lambda, \mu}) \setminus \{[x:y:z] / x+z=0\}$$

è una parabola $\Leftrightarrow$ ha un solo punto improprio

$\Leftrightarrow$ è tangente alla retta $l_\infty : x+z=0$.

$$\mathcal{C}_{\lambda, \mu} \cap l_\infty : 2\lambda x^2 + \mu y^2 + \mu xy = 0$$

$$\Delta = \mu^2 - 8\mu\lambda = \mu(\mu - 8\lambda) = 0 \quad \begin{cases} \mu=0 & \lambda=1 \\ \lambda=1 & \mu=8 \end{cases}$$

$$\mu=0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 : x^2 - xz = 0 \quad x(x-z)=0 \neq$$

$$\mathcal{C}_1 = L(A, B) + L(C, D) \quad L(A, B) \cap L(C, D) = [0:1:0] \in l_\infty$$

$\Rightarrow$ parabola simplic. degenera

$$\lambda=1, \mu=8 \Rightarrow \mathcal{C}_{1,8} : x^2 + 8y^2 - xz - 8yZ = 0$$

parabola non degenera.

Verifikation: da $\tilde{C}$ in effetti uno parabolo non deg:

(24.7)

$$U = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \{[x:y:z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid x+z=0\} = \left\{ \left[\frac{x}{x+z}, \frac{y}{x+z}, \frac{z}{x+z} \right] \right\}$$

$$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow U$$

$$(s, t) \longmapsto [s:t:1-s]$$

$$1 - \frac{x}{x+z} = \frac{z}{x+z}$$

$$\left(\frac{x}{x+z}, \frac{y}{x+z} \right) \longmapsto [x:y:z] = \left[\frac{x}{x+z} : \frac{y}{x+z} : \frac{z}{x+z} \right]$$

In ogni caso prima $z=1-x$

$$\leadsto x^2 + 8y^2 - x(1-x) - 8y(1-x) = 0$$

$$2(x^2 + 4y^2 + 4xy - 8y) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

parabolo non degenero

$$\det = 0$$

$$\mathcal{C}_{\lambda, \mu} \cap U: (x+2y)^2 - 8y = 0$$

Ex (5) Siano $C_1: xy = 0$ e $C_2: x^2 - y^2 = 0$ (248)
 due coniche degeneri in P_R^2 ,

i) si $\mathbb{F}$ il fascio di coniche $\mathbb{F}(C_1, C_2)$.

Mostrare che il luogo base del fascio è
 formato da un solo punto (con mult. 4).

Mostrare che ogni conica di $\mathbb{F}$ è semplice
 degenera, ed è formata da 2 rette distinte
 che si incontrano nel punto base.

ii) mostrare che in P_C^2 , il fascio analogo
 contiene esattamente 2 coniche doppiamente degeneri.

Soluz. i) $C_{\lambda, \mu}: \lambda x^2 + \mu xy - \lambda y^2 = 0$

$$C_1, C_2 = \{A, A, A, A\} \text{ con } A = [0:0:1] \in P_R^2$$

$$\text{supp. } \lambda \neq 0 \quad \lambda \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \mu \left(\frac{x}{y}\right) - \lambda = 0 \quad \Delta = \mu^2 + 4\lambda^2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\Delta}}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda x^2 + \mu xy - \lambda y^2 = \left(2\lambda x + \mu y + (\sqrt{\mu^2 + 4\lambda^2})y\right) \left(2\lambda x + \mu y - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda^2}y\right)$$

$\Rightarrow C_{\lambda, \mu}$ è sempl. degenera, 2 rette che si incontrano
 in $A = [0:0:1]$

Ex 6 Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

(24,9)

Supponiamo che ogni conica in $\mathcal{F}$ sia degenera,
e che non esista una retta contenuta nel supporto
di ogni conica di $\mathcal{F}$ (cioè nel luogo base).

Mostrare che il luogo base di $\mathcal{F}$ è formato
da un solo punto, e che il fascio contiene
esattamente 2 coniche doppiamente degeneri.

Solgimento: 1) mostrare che $\mathcal{F}$ contiene
al più 2 coniche doppiamente degeneri:

$$x^2=0 \quad y^2=0, \quad \lambda x^2 + \mu y^2 = 0 \quad \text{ne ha solo 2.}$$

2) Mostrare che c'è un solo punto base

(ce ne fossero di più saremmo nei casi

a-b-c-d-e con coniche non degeneri).

3) Scegliere RP e analizzare la matrice.