

TUTORATO GEOMETRIA 2

06/12/2021

TROLETI DANIELE

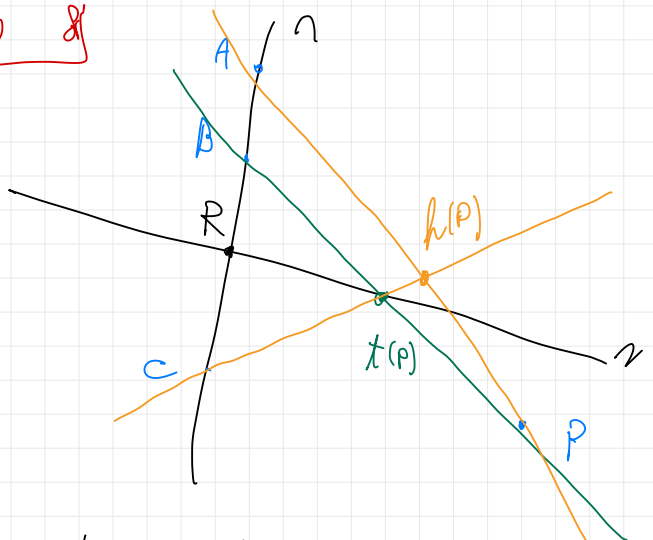


ESERCIZIO 15 Foglio 8

$$g(A) = A$$

$$g(R) = R$$

$$g(B) = C$$



(i)

Consideriamo Π, N due punt. di $r \cup \{R\}$
 $\{A, B, \Pi, N\}$ formano un sistema di ref. proiettivo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N: x_2 = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta \neq 0, 1$$

$$r: x_0 = x_1 \quad R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{In } P \in \mathbb{P}^2 \setminus N \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ c \end{bmatrix} \text{ con } c \neq 0.$$

$$L(R, P): cx_0 - cx_2 = 0 \Rightarrow t(P) = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ c \end{bmatrix}$$

$$L(C, t(P)): -c\beta x_0 + cx_1 + \beta(\beta-1)x_2 = 0$$

$$L(A, P): cx_0 - \beta x_2 = 0$$

$$h(P) = [\beta(\beta-1) + \beta, \beta^2, \beta \cdot c]$$

$$\text{In } f \text{ le proietteriti di matrice } \begin{pmatrix} \beta-1 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

3) In $\mathbb{P}^2 \setminus \ell$ $f \equiv h$.

$$f(A) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A$$

$$f(R) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = R$$

$$f(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C$$

$\Rightarrow f|_{\ell}$ e g coincidono su un int. di spaz. proiettivo

$$\Rightarrow f|_{\ell} \equiv g.$$

(iii) Si vede chiaramente che se $P \in \ell \Rightarrow f(P) = P$.

Quindi sono punti fissi i punti di $\ell \cup \{A\}$

Se per assurdo ci fosse un altro punto fisso M
allora $\{A, R, M, N\}$ con $N \in \ell \setminus \mathbb{P}^1$ sarebbe
un SdR proiettivo e f lo lascia fisso
 $\Rightarrow f \equiv \text{id}_{\mathbb{P}^2}$ ma $f(B) \neq B$ ∇ .

(iii') $\Rightarrow$ Se f è involuzione $\Rightarrow$ esiste $A \neq R$ punti
fissi $\beta(A, R, B, C) = -1$.

$\Leftarrow$ $f|_{\ell}$ è involuzione $\Leftrightarrow \beta(A, R, B, C) = -1$

$\Rightarrow f|_{\ell}$ è involuzione $\Rightarrow f|_{\ell}^2 = \text{id}$.

$$f|_{l_1} = \text{id}_{l_1} \Rightarrow f|_{l_1}^2 = \text{id}_{l_1}$$

$$\Rightarrow f|_{l_1 \vee l_2}^2 = \text{id}_{l_1 \vee l_2} \quad \text{ma } L(l_1, l_2) = \mathbb{P}^2$$

$$\Rightarrow f^2 = \text{id}.$$

#

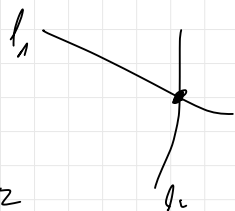
ES 4 Foglio 8

$P_1 \neq P_2$ punti in $\mathbb{P}_K^2$ F_1, F_2 fasci di rette
di centro P_1 e P_2 rispettivamente. $f: F_1 \rightarrow F_2$.

($\Rightarrow$) Per qualsiasi F_1 e F_2 corrispondono a due rette
 l_1 e l_2 .

Quindi abbiamo $f_*: l_1 \rightarrow l_2$

$f(L(P_1, P)) = L(P_1, P_2) \Rightarrow f_*$ fissa $l_1 \cap l_2$



$\Rightarrow f_*$ è una proiettività.

Sia R il centro di f_* , R corrisponde a
una retta π in $\mathbb{P}_K^2$.

$$f_*(Q) = L(R, Q) \cap l_2 \iff f(Q) = L(P_1, Q, P_2)$$

$$Q \iff \pi$$

$$(\Leftarrow) g_i: F_i \rightarrow \mathbb{R} \quad g_i(\alpha) = \alpha_i \alpha.$$

$\mathbb{P}_n^2$ e sia $\mathcal{F}$ un fascio di rette di centro P
 sia t una retta con $P \notin t$.
 $g(\alpha) = \alpha \cdot t$ è suriettivo.

Esol
 $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$$t: x_2 = 0$$

Coordinate duali: $\{d_0, d_1, d_2\}$ $d_2 = 0$
 $\Rightarrow d_1, d_0$ è un sistema di coordinate $\mathcal{F}$

$$f: t \rightarrow \mathcal{F}$$

$$[x_1, x_0] \mapsto [x_1 - x_0]$$

È un isomorfismo proiettivo

g_1, g_2 sono isomorfismi proiettivi

$$\Rightarrow f = g_2^{-1} \circ g_1 \Rightarrow f \text{ è isomorfismo proiettivo}$$

e chiaramente $f(L(P_1, P_2)) = L(P_1, P_2)$

#

ES 2 Foglio 8)

(i) Le equazioni che l_1, l_2, l_3 concorrono in $R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
e m_1, m_2, m_3, m_4 concorrono in $S = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow l_4$ deve passare per R

$$\alpha(x_0 - x_1) + x_2 - 4x_1 = 0 \quad \text{impongo il passaggio per } R$$

$$\boxed{\alpha = 0}$$

Chiamiamo $p_i: x_0 = 0$ e $q_i: x_2 = 0$.

luego $P_i = l_i \cap p_i$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego $Q_i = m_i \cap q_i$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Consideriamo $f|_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(P_i) = Q_i$

$$\Rightarrow \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$$

$$\beta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

coordinate di $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in questo SdR
 $\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$
 $-\alpha + 4 = 1 \Rightarrow \alpha = 3$

$$\beta(Q_1, Q_1, Q_3, Q_4) = \frac{\delta}{\delta-1}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\delta}{\delta-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = -2}$$

14 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f|_{\mathbb{R}} = g.$

Mettiamo coordinate omogenee in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente
 $[x_1, x_2]$ e $[x_1, x_2]$

Se B è la matrice di g in questo sistema allora

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 0 & B & \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ rappresenta } f$$

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proviamo $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✱

ES 1 FOLIO 9

$\lambda, d \in k$, $-\lambda d \neq 1$, $-\lambda d \neq 0$. P_0, P_1 punkt. distent;

h_{so} P ein Punkt

$$W_{P_0, \lambda} = -\lambda (P - P_0) + P_0 = \lambda P + (1-\lambda) P_0$$

$$W_{P_1, d} = d P + (1-d) P_1$$

h_{ier} $\underline{x}$ die λ -coordinate d. P , $\underline{x}_1$ d. P_1 & $\underline{x}_0$ d. P_0 .

$$f(\underline{x}) = W_{P_0, \lambda} \circ W_{P_1, d}(\underline{x}) =$$

$$= W_{P_0, \lambda} \left(d \underline{x} + (1-d) \underline{x}_1 \right) = -\lambda d \underline{x} + \lambda (1-d) \underline{x}_1 + (1-\lambda) \underline{x}_0$$

CLAIM: $\exists \underline{x}_2$ tale. che $-\lambda (1-d) \underline{x}_1 + (1-\lambda) \underline{x}_0 = (1-\lambda d) \underline{x}_2$

$$\lambda d \neq 1$$

$$\Rightarrow \underline{x}_2 = \frac{\lambda (1-d)}{1-\lambda d} \underline{x}_0 + \frac{1-\lambda}{1-\lambda d} \underline{x}_1$$

Quindi $f(\underline{x}) = \lambda d \underline{x} + (1-\lambda d) \underline{x}_2$ $P_2 = (\underline{x}_2)$

$$P_2 = P_1 \Leftrightarrow 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \frac{1(1-d)}{1-1 \cdot d} = 1 \quad \text{OK.}$$

$$P_2 = P_0 \Leftrightarrow d = 1 \Rightarrow \frac{1-\lambda}{1-\lambda} = 1 \quad \text{OK.}$$

Se φ l'applicazione lineare $\varphi: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ soggetta al
 lemma $m, p \in \mathbb{Q}[x]$ il polinomio minimo e
 caratteristico di φ .

$$p^4 = \text{id} \iff \varphi^4 = \lambda \text{id}_{\mathbb{Q}^3}$$

$$\Rightarrow m \mid x^4 - \lambda \quad \lambda \neq 0$$

CLAIM: λ è positivo

Se per assurdo $\lambda < 0 \Rightarrow x^4 - \lambda$ non avrebbe
 alcuna radice razionale. $\Rightarrow \varphi$ non avrebbe
 autovalori $\Rightarrow p$ non ha radici razionali
 $\Rightarrow p$ è irriducibile $\Rightarrow m = p$
 $\Rightarrow m$ avrebbe grado 3

$$m \mid x^4 - \lambda \Rightarrow x^4 - \lambda = m(\alpha x + \beta)$$

$\Rightarrow x^4 - \lambda$ ha una radice razionale $\nexists$.

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ la radice positiva di $x^4 - \lambda$.

Se p fosse irriducibile $\Rightarrow m = p$

$$x^4 - \lambda = (x - \alpha)(x + \alpha)(x - i\alpha)(x + i\alpha)$$

m ha grado 3 ed è razionale. $\Rightarrow$ prende
3 dei 4 fattori lineari ma in nessun
caso otteniamo un polinomio in $\mathbb{Q}[x]$.

$\Rightarrow f$ è riducibile.

$$\begin{aligned} \text{Se } x^2 + \alpha^2 \nmid m &\Rightarrow m \mid x^2 - \alpha^2 \Rightarrow \varphi^2 = \alpha \text{ id} \\ &\Rightarrow \varphi^2 = \text{id} \quad \text{E.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 + \alpha^2 \mid m$$

$$\Rightarrow m = (x - \alpha)(x^2 + \alpha^2) \quad \text{oppure} \quad m = (x + \alpha)(x^2 + \alpha^2)$$

In ogni caso c'è un solo punto fisso.

#

ES 11 FOLIO 8

le rette l_i concorrono in $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ e le
rette m_i concorrono in $O' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\pi = L(O, P) = 2x_0 - x_2 = 0$$

$$\forall_i f(l_i) = m_i \quad \forall_i \Rightarrow f(O) = O'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(P) = Q & \Rightarrow f(L(O, P)) = f(\pi) = L(O', Q) = \pi' \\ f(O) = O' \end{aligned}$$

$$\beta(l_1, l_2, l_3, \pi) = \beta(m_1, m_2, m_3, \pi') = \frac{l_2 - 3l_1}{-2} \cdot \frac{3}{10}$$

||
-9

↑

$$\pi' = 10x_0 + 27x_2 = 0$$

$$\Rightarrow [10, 0, 27] = [1, 0, 27]$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi': x_0 + 27x_2 = 0}$$

$$\boxed{Q \in \pi' \setminus \{O'\}}$$

Ora mostriamo l'esistenza:

Sia $A_1 \in \mathcal{L}_1$, $A_2 \in \mathcal{L}_2$ distinti e

$$\{0, A_1, A_2, P\} \quad \text{SolR}$$

$$B_1 \in \mathcal{M}_1, \quad B_2 \in \mathcal{M}_2$$

$$\{0', B_1, B_2, Q\} \quad \bar{\mathcal{L}} \quad \text{SolR}$$

$$\Rightarrow \exists! f \quad f(0) = 0' \quad f(A_1) = B_1 \quad f(A_2) = B_2$$

$$f(P) = Q$$

$$\Rightarrow f(\mathcal{L}_1) = \mathcal{M}_1 \quad f(\mathcal{L}_2) = \mathcal{M}_2.$$

f è anche d.f tra $\mathcal{T}_0$ e $\mathcal{T}_0'$

$$f(\mathcal{L}_i) = \mathcal{M}_i \quad i = 1, 2 \quad f(\mathcal{L}) = \mathcal{M}'$$

$$\begin{aligned} \beta(m_1, m_2, m_3, n') &= \beta(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}) = \beta(f(\mathcal{L}_1), f(\mathcal{L}_2), f(\mathcal{L}_3), f(\mathcal{L})) \\ &= \beta(m_1, m_2, f(\mathcal{L}_3), n') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\mathcal{L}_3) = m_3$$

#