

3.7 Fasci di ipersuperfici.

(219)

Abbiamo visto come l'insieme di tutte le ipersuperfici di $\mathbb{P}_k^n$ di grado d formano ^(o tutte) uno spazio proiettivo detto "sistema lineare delle ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}^n$ ".

Più precisamente: se $k[x_0, \dots, x_n]_d$ è lo sp. vett. dei pol. omogenei di grado d in $x_0, \dots, x_n$, allora tale sistema lineare è lo spazio

$\mathbb{P}(k[x_0, \dots, x_n]_d)$ e ha dimensione $\binom{n+d}{n}$.

Così sono i sottospazi proiettivi di questo spazio?

Sono famiglie di ipersuperfici.

Per esempio, date 2 ipersuperfici distinte (deg d)

$$C: F(x_0, \dots, x_n) = 0 \quad \text{e} \quad D: G(x_0, \dots, x_n) = 0$$

consideriamo $[F], [G] \in \mathbb{P}(k[x_0, \dots, x_n]_d)$

allora la retta $L([F], [G]) \subset \mathbb{P}(k[x_0, \dots, x_n]_d)$

è la famiglia composta da tutte e sole le ipersuperfici di equazione

$$H_{\lambda, \mu}(x_0, \dots, x_n) = \lambda F(x_0, \dots, x_n) + \mu G(x_0, \dots, x_n) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_k^1$.

$\Rightarrow$ È detta "un fascio di ipersuperfici".

Ci interessano i fasci di coniche.

(220)

Def: Se $P(k[x_0, \dots, x_n])$ è "il sistema lineare di tutte le ipersuperfici di grado d in P^n_k "

chiamiamo un sottosp. proiettivo in $P(k[x_0, \dots, x_n])$ un "sistema lineare di ipersuperfici di grado d in P^n_k " e diciamo che la sua dimensione è la dimensione del sistema lineare.

Un "fascio di coniche" è un sistema lineare di dimensione 1 di ipersuperfici di grado 2 in P^2_k .

Date 2 coniche distinte, si può considerare il sistema lineare che le contiene

(l'unica retta per le 2 coniche in $P(k[x_0, x_1, x_2]_2)$).

Questo permette spesso di costruire dei fasci di coniche interpolando 2 coniche opportunamente scelte.

Osservazione: Se $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$ ogni fascio di coniche contiene almeno 1 conica degenere.

Dim: Siano $C_1 = [F_1]$ e $C_2 = [F_2]$ due coniche distinte

Consideriamo il fascio di coniche $C_{\lambda, \mu}: \lambda F_1(x) + \mu F_2(x) = 0$

Se $F_1(x) = {}^t x A x$ e $F_2(x) = {}^t x B x$

allora $C_{\lambda, \mu}: {}^t x (\lambda A + \mu B) x = 0$.

Allora $C_{\lambda, \mu}$ è degenere se e solo se

$$D(\lambda, \mu) = \det(\lambda A + \mu B) = 0$$

anz $D(\lambda, \mu) = 0$ è nullo (e allora le $C_{\lambda, \mu}$ sono tutte degeneri) oppure è un polinomio in (λ, μ) , omogeneo di grado 3 (perché $A, B \in M_{3 \times 3}(k)$), quindi ammette almeno una radice $[\lambda: \mu]$.

[EX] Siano P_1, P_2, P_3 non allineati in $\mathbb{P}_k^2$,
 sia r una retta in $\mathbb{P}_k^2$ t.c. $P_1 \in r, P_2, P_3 \notin r$.

Considerare la famiglia

$$\mathcal{F} = \{ \mathcal{C} = [F] \in \mathcal{P}(k[x_0, x_1, x_2]_2) \mid \begin{array}{l} P_1, P_2, P_3 \in S_{\text{sup}}(\mathcal{C}) \\ I(\mathcal{C}, r, P_1) \geq 2 \end{array} \}$$

Mostrare che $\mathcal{F}$ è un fascio di coniche.

Dim: Possiamo scegliere $R \in r$ t.c. P_1, P_2, P_3, R siano
 in posizione generale (basta prendere $R \in r \setminus \{P_1\}$
 t.c. $R \neq r \cap L(P_2, P_3)$). In $\mathcal{RP}(P_1, P_2, P_3, R)$
 le coniche della famiglia hanno equazione

$$A x^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

$$P_1 = [1:0:0], P_2 = [0:1:0], P_3 = [0:0:1], R = [1:1:1]$$

$$r: y - z = 0$$

$$P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{C} \Rightarrow A = D = F = 0$$

$$\mathcal{C}: Bxy + Cxz + Eyz = 0$$

$$\mathcal{C} \cap r: Bxy + Cxy + E y^2 = 0$$

$$y((B+C)x + E y) = 0 \quad P_1 \text{ and } y=0$$

$$I(\mathcal{C}, r, P) = 2 \Leftrightarrow B+C=0$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: Bxy - Bxz + E yz = 0$$

quindi $\mathcal{F} = \{ C: Bxy + (-B)xz + Eyz = 0 \mid [B:E] \in \mathbb{P}_k^1 \}$

è un fascio di coniche. //

Osservazione: le coniche degeneri in $\mathcal{F}$ sono:

$$\begin{pmatrix} 0 & B & -B \\ B & 0 & E \\ -B & E & 0 \end{pmatrix} \text{ degenera se } B=0 \text{ oppure } E=0.$$

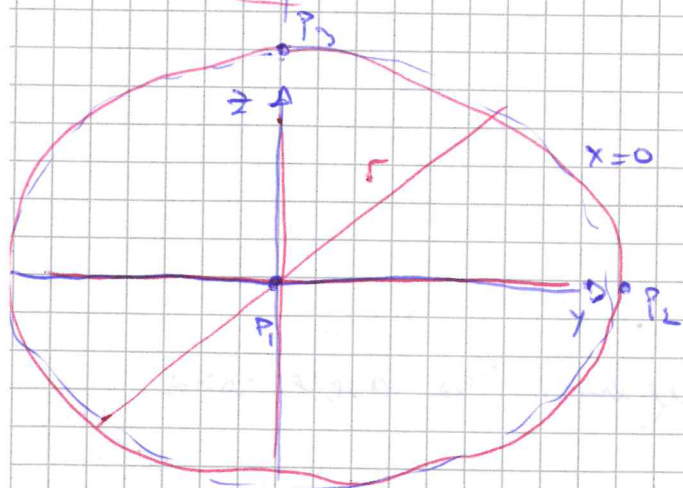
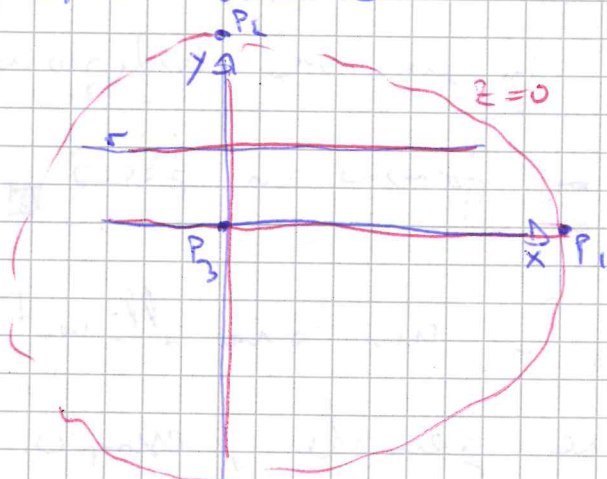
$$\star \begin{pmatrix} 0 & B & -B \\ B & 0 & E \\ -B & E & 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il fascio $\mathcal{F}$ è il fascio per le 2 coniche degeneri.

Geometricamente

$$C_1: x(y-z) = 0$$

$$C_2: yz = 0$$



224

Prop: Siano P_1, P_2, P_3, P_4 4 punti ^{distinti} V in $\mathbb{P}_k^2$
NON Allineati: Allora le coniche per P_1, P_2, P_3, P_4
 formano un fascio.

Dimo Poiché i 4 punti non sono allineati,
 possiamo scegliere 3 in pos. generale.

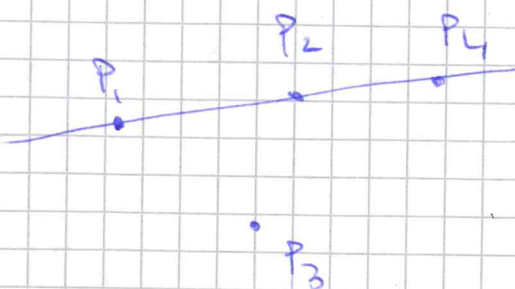
Supponiamo Siano P_1, P_2, P_3 in pos. generale
 scegliam U e $RP(P_1, P_2, P_3, U)$.

In questo riferimento proiettivo, poiché le coniche
 passano per P_1, P_2, P_3 avranno equazione

$$C: Axy + Bxz + Cyz = 0 \quad \text{per } [A, B, C] \in \mathbb{P}_k^2,$$

il passaggio per il punto P_4 impone una condizione
 lineare sui coeff. $A, B, C \Rightarrow$ formano un fascio. ■

Attenzione: i punti P_1, P_2, P_3, P_4 non sono allineati,
 ma possono essere in posizione generale, esempio



Ex Trovare delle coniche degeneri tra quelle sopra.

Osservazione: Siano $l_1 \subset \mathbb{P}^2$ e $l_2 \subset \mathbb{P}^2$ 2 rette,

(225)

chiamiamo $l_1 + l_2$ la conica C il cui supporto è $l_1 \cup l_2$ (e la cui equazione è il prodotto delle 2 equazioni).

Mostriamo la proposizione nel seguente modo (se $k = \frac{k}{k}$ o $k = \mathbb{R}$)

Sia $\mathcal{F} = \{C \text{ conica} / P_i \in \text{Supp}(C) \text{ } i=1,2,3,4\}$

la famiglia delle coniche per P_i .

Ex: scegli
campo k

Allora $\mathcal{F}$ è un sistema lineare,

infatti se $C_1: F(x,y,z)=0 \in \mathcal{F}$ e $C_2: G(x,y,z)=0 \in \mathcal{F}$

allora $\lambda F + \mu G = 0$ è una conica in $\mathcal{F}$.

Bisogna mostrare che $\mathcal{F}$ ha dimensione 1.

Sia $C_1 = L(P_1, P_2) + L(P_3, P_4)$, $C_2 = L(P_1, P_3) + L(P_2, P_4)$

allora chiaramente $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ avesse $\dim \geq 2$ allora potremmo trovare

un fascio $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ che non contenga né

C_1 , né C_2 , né $C_3 = L(P_1, P_4) + L(P_2, P_3)$.

Ma il fascio $\mathcal{F}'$ deve contenere almeno una conica

degenera che contenga P_1, P_2, P_3, P_4 nel supporto $\mathcal{F}$.

Quindi $\mathcal{F}$ è il fascio per C_1, C_2 , e contiene anche C_3 . ■

Ex Sia $\mathcal{F} = \{ C \text{ conica} \mid \begin{array}{l} P_1 = [1:0:0], P_2 = [0:1:0], P_3 = [0:0:1] \\ P_1, P_2, P_3 \in \text{Supp}(C) \\ C \text{ tangente alla retta } r: x+y+z=0 \end{array} \}$ (226)

è $\mathcal{F}$ un fascio di coniche?

è un sistema lineare? Se sì, che dimensione?

Svolgimento: $P_2 \in \text{Supp}(C) \Rightarrow C: Axy + Bxz + Cyz = 0$

tangente a r :

$$\begin{cases} Axy + Bxz + Cyz = 0 \\ 4y + x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -x - 4y \\ Axy - Bx^2 - 4Bxy - Cxy - 4Cy^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow +Bx^2 + (-A + 4B + C)xy + 4Cy^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &: (4B + C - A)^2 - 16BC = \\ &= 16B^2 + C^2 + A^2 + 8BC - 8AB - 2AC - 16BC = \\ &= 16B^2 + C^2 + A^2 - 8BC - 8AB - 2AC = 0 \end{aligned}$$

Non è condizione lineare!

$$\begin{aligned} \text{Es. } A=B=C=1 &\Rightarrow \Delta=0 & C_1: xy+xz+yz=0 &\in \mathcal{F} \\ B=0, A=C=1 &\Rightarrow \Delta=0 & C_2: xy+yz=0 &\in \mathcal{F} \\ C=0, A=4, B=1 &\Rightarrow \Delta=0 & C_3: 4xy+xz=0 &\in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Pero $C_4: xz=0$ non è tangente a r !
(C_4 incontra r in 2 punti distinti.)

$$\Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \{C \text{ coniche in } \mathbb{P}^2\} = \mathbb{P}(k[x, y, z]_2) \cong \mathbb{P}_k^5 \quad (227)$$

non è un sottospazio proiettivo.

In effetti la famiglia $\mathcal{F}$ è contenuta dentro un piano in $\mathbb{P}^5$ (il piano delle coniche con equazione $Axy + Bxz + Cyz = 0$) ed è una conica (di equazione $(4B+C-A)^2 - 16BC = 0$) in questo piano!!

Osservazione: quanto visto sopra

(cioè che $C_4 \in L(C_1, C_2) \iff C_4 \notin \mathcal{F}$)

vale in ogni $\text{car}(k) \neq 2$.

(228)

Descriviamo i fasci di coniche in $\mathbb{P}_C^2$ e $\mathbb{P}_R^2$.

Abbiamo osservato che ogni fascio di coniche ne contiene almeno 1 singolare (degenera).

Sia $\mathcal{C}_1 = l_1 + l_2$ una conica degenera (doppia degenera se $l_1 = l_2$) in $\mathbb{P}_C^2$.

Se $\mathcal{C}_2$ è una conica $\mathcal{C}_2 \neq \mathcal{C}_1$, allora

o $\mathcal{C}_2 \supset l_1$, oppure $\mathcal{C}_2 \cap l_1 = \{A, B\}$ 2 punti (possibilmente coincidenti se l_1 è tangente a $\mathcal{C}_2$ in $A=B$).

Stessa cosa per la retta l_2 , quindi possiamo dire che $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_1$ o contiene una retta tra l_1 e l_2 oppure sono 4 punti contati con molteplicità.

Nel primo caso anche $\mathcal{C}_2$ è degenera, e possiamo supporre che $\mathcal{C}_2 = l_1 + l_3$ con $l_3 \neq l_2$ due rette distinte,

e quindi il fascio di coniche $\mathcal{I}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \{l_1 + (\text{fascio di rette per } l_2 \cap l_3)\} = \text{fascio di coniche passanti per } A, B, C, P \text{ con } A, B, C \text{ tre punti distinti di } l_1 \text{ e } P = l_2 \cap l_3$

(nel caso $P \notin l_1$) oppure fascio di con. per A, B, C con sopra e f.c. $\mathcal{I}(\mathcal{C}, l_3, P) \geq 2$ (se $P \in l_1$ e $l_3 \neq l_1$)

In questo caso ($C_2 \cap C_1$ contiene una retta)

tutte le coniche del fascio sono degeneri con una retta in comune.

Il secondo caso $C_2 \cap C_1$ non contiene rette.

Ricordiamo $C_1 = l_1 + l_2$ è conica degenera, C_2 una conica.

$$C_1 \cap C_2 = (C_2 \cap l_1) \cup (C_2 \cap l_2) = \{A, B, C, D\}$$

Sono 4 punti contati con molteplicità.

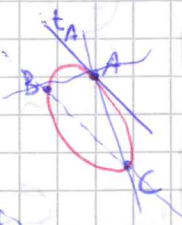
Descriviamo i possibili fasci in base ai punti A, B, C, D in $\mathbb{P}^2$ con C_2 non degenera.

② 4 punti distinti: $C_1 \cap C_2 = \{A, B, C, D\}$



allora i 4 punti A, B, C, D sono in posizione generale, e il fascio è il fascio di coniche per A, B, C, D , contiene 3 coniche degeneri: $L(A, B) + L(C, D)$, $L(A, C) + L(B, D)$, $L(A, D) + L(B, C)$

③ 3 punti: $C_1 \cap C_2 = \{A, A, B, C\}$. In questo caso



i 3 punti A, B, C non sono allineati (altrimenti se

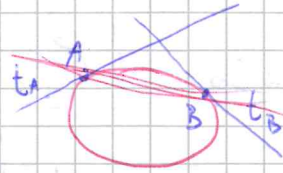
C_1 due C_2 , quindi tutte le coniche in $\mathbb{F}(C_1, C_2)$, conterebbero la retta per A, B, C). Allora esiste una retta $t_A \subset \mathbb{P}^2$

passante per A t.c. C_1 e C_2 sono tangenti in A a t_A ,

e quindi tutte le coniche in $\mathbb{F}(C_1, C_2)$. 2 coniche degeneri:

$L(A, B) + L(A, C)$ e $t_A + L(B, C)$. Fascio delle c. per A, B, C tangenti in A alla retta t_A .

(c) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, A, B, B\}$



Allora esiste t_A retta per A , $B \notin t_A$ e t_B retta per B , $A \notin t_B$

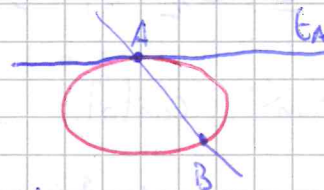
con $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ (quindi tutte le coniche in $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$)

tangenti a t_A in A e a t_B in B .

doppia mente degenera

2 coniche degeneri: $t_A + t_B$, $L(A, B) + L(A, B)$ in $\mathcal{F}$.

(d) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, A, A, B\}$



Allora $\exists t_A$ retta per A , $B \notin t_A$ t_C .

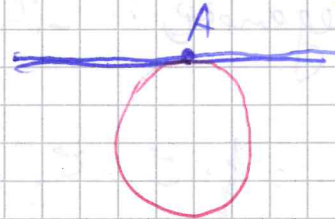
$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ (e tutte le $\mathcal{C} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$) verificano

$$A, B \in \text{Supp}(\mathcal{C}), \quad I(\mathcal{C}, t_A, A) \geq 2, \quad \text{Supp}(\mathcal{C}) \cap L(A, B) = \{A, B\}$$

Una sola conica degenera in $\mathcal{F}$: $t_A + L(A, B)$

(se ce ne fosse un'altra degenera per A, B saremmo nel caso (c)).

(e) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, A, A, A\}$



in questo caso $\mathcal{C}_1$ (degenera) e

$\mathcal{C}_2$ (non deg.) si intersecano solo in A (con mult. 4).

C'è solo una conica degenera nel fascio:

$t_A + t_A$ (doppia mente degenera).

I fasci di coniche (a), (b), (c) possono essere descritti come luoghi delle coniche che soddisfanno certe proprietà geometriche (es. passano per 4 punti, ...), mentre per (d) e (e) si prende il fascio per due coniche (p.es. quella degenera e un'altra).



La proprietà fondamentale, che abbiamo utilizzato per descrivere i fasci di coniche è la seguente:

Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(C_1, C_2)$ un fascio di coniche

Se $I(C_1, l, P) \geq k$ e $I(C_2, l, P) \geq k$

Allora $\forall C \in \mathcal{F} \quad I(C, l, P) \geq k$.

In particolare, se C_1 è degenera e C_2 non deg.

$$C_1 = l_1 + l_2 \quad \text{e} \quad C_1 \cap C_2 = \{A, B, C, D\}$$

$$\Rightarrow \forall C \in \mathcal{F}(C_1, C_2), C \neq C_1, C_1 \cap C = \{A, B, C, D\}$$

Def: possiamo definire l'intersezione (con molteplicità)

di 2 coniche non degeneri in questo modo (in $\mathbb{P}_C^2$)

Siano C_1, C_2 coniche non deg., Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(C_1, C_2)$

$$\text{sia } l_1 + l_2 \text{ una conica degenera in } \mathcal{F}, \text{ allora } C_1 \cap C_2 = C_1 \cap (l_1 + l_2) \\ = \{A, B, C, D\} = C_1 \cap (l_1 + l_2)$$