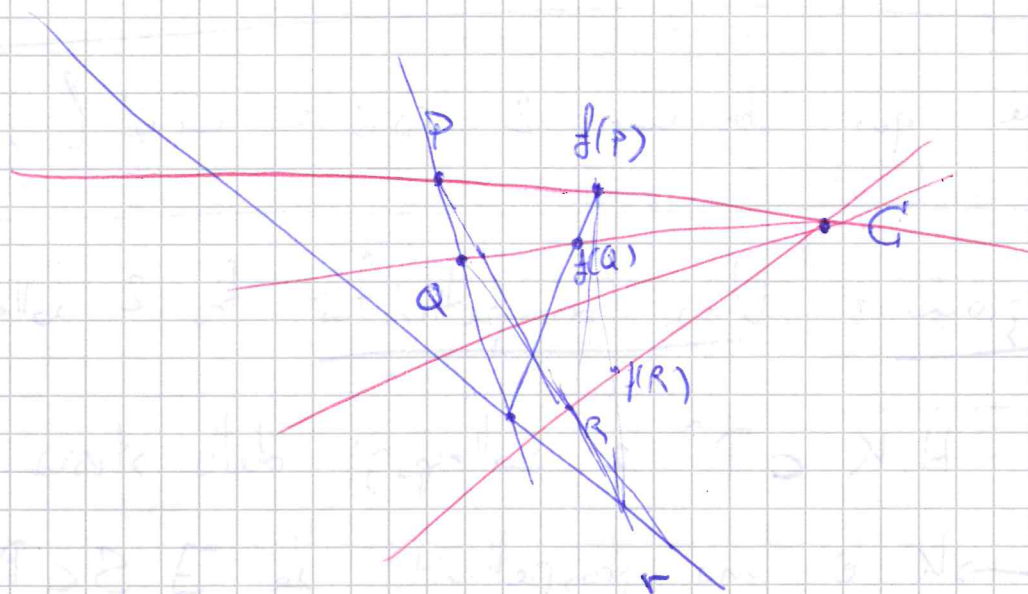


Omologie: $f: P^n \rightarrow P^n$ proiettività t.c.

$\exists H \subset P^n$ iperpiano di punti fissi per f .

Per distib $\Rightarrow$ esiste un punto $C \in P^n$ fisso per f .
t.c. ogni iperpiano per C è stabile per f .

(E) se r è una retta, C è un punto in P^2 ,
si costruisce un'omologia nel seguente modo



la retta r (iperpiano H) è detta asse dell'omologia,
e il punto C è detto centro dell'omologia.

[Ex] Cosa succede se $C \in H$? può succedere!

Costruire la forma ~~per~~ di Jordan per f ,
e la rappresentazione geometrica in P^2 .

Osservazione: Desargues:

punti $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ t.c. $L(P_1, P_4), L(P_2, P_5), L(P_3, P_6)$

sono concorrenti in punto $G \neq P_1, \dots, P_6$ (P_1, P_2, P_3 e P_4, P_5, P_6 sono prospettivi.)

Allora i triangoli P_1, P_2, P_3 e P_4, P_5, P_6 sono

omologhi, per un'omologia di centro G e

asse l passante dai punti $L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6),$

$L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5), L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6).$

(Anche qui abbiamo 2 casi: $G \notin l$, o $G \in l$)

Definizione: "Una prospettività tra 2 sottospazi"

Siano $H, K \subset \mathbb{P}^n$ 2 sottospazi della stessa dimensione d

$f: H \rightarrow K$ è una prospettività se $\exists S \subset \mathbb{P}^n$ sottospazio

di dimensione $n-d-1$, $\pi_{S,K}: \mathbb{P}^n \setminus S \rightarrow K$

$Q \mapsto L(S, Q) \cap K$

con $S \cap H = S \cap K = \emptyset$, t.c. $f = (\pi_{S,K})|_H$.

Sottospazi Isotropi

188

$b: V \times V \rightarrow k$ forma bil. simmetrica $W \subseteq V$ sottosp.
 $W^\perp = \{v \in V / b(v, w) = 0 \ \forall w \in W\}$

Abbiamo visto: Se b è non-degenera
 $\dim_k W + \dim_k (W^\perp) = \dim_k V$.

Def. $W \subseteq V$ è ISOTROPO o b -ISOTROPO
se $W \subseteq W^\perp$, cioè $\forall w_1, w_2 \in W \ b(w_1, w_2) = 0$.

Su $\mathbb{R}$ troviamo una base dove $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
ha matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline & -I_q \\ \hline & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline & -I_q \\ \hline & 0 \end{array} \right)$

chiamiamo $V^+ = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$, $V^- = \langle e_{p+1}, \dots, e_{p+q} \rangle$

e $K = \langle e_{p+q+1}, \dots, e_n \rangle$ $\text{sgn}(b) = (p, q)$

allora un sottospazio isotropo massimale

ha dimensione $\dim K + \min(p, q) = n - \max(p, q)$.

Infatti uno spazio più grande avrebbe
intersezione con V^+ o V^- .

Uno che raggiunge il minimo: $\langle e_{p+q+1}, \dots, e_n, e_1 + e_{p+1}, \dots, e_{\min} + e_{p+\min} \rangle$

(Una pretesa su argomenti passati)

189

• Il prodotto semidiretto

② guardiamo prima un argomento noto,
la somma diretta di spazi vettoriali:

• sia $V = \text{sp. vet.} / k$, $W_1, W_2 \subseteq V$ sottospazi

Diciamo che V è somma diretta di W_1 e W_2 se

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \text{ e } W_1 + W_2 = V.$$

• Siano V_1 e V_2 due sp. vet. / k ,

definiamo lo sp. vet. somma diretta di V_1 e V_2

$$V = V_1 \times V_2 \text{ prol. cartesiane come insieme,}$$

con le operazioni di somma e prod. per vettori...

dentro V abbiamo $\tilde{V}_1 = \{(v, 0) / v \in V_1\} \cong V_1$

e $\tilde{V}_2 = \{(0, w) / w \in V_2\} \cong V_2$ che sono

taali che V è somma diretta di $\tilde{V}_1$ e $\tilde{V}_2$.

In entrambi i casi scriviamo $V = V_1 \oplus V_2$

⑥ prod. diretto di gruppi

• Sia G un gruppo, H, K sottogruppi t.c.

i) ~~Abb~~ $H \cap K = \{1\}$

ii) $H \cdot K = G$ cioè $\forall g \exists h \in H, k \in K / g = h \cdot k$

iii) H e K sono normali in G .

Allora diciamo che G è il prodotto diretto di

H e K , e gli elementi di H commutano con quelli di K .

Inoltre ogni elemento di G si scrive in maniera unica

come $g = h \cdot k = kh$ per un certo $h \in H, k \in K$.

• Siano H e K due gruppi.

Definiamo il gruppo $G = H \times K$:

insieme: prod. cartesiano prodotto: prod. termine a termine

In G abbiamo $\tilde{H} = \{(h, 1) / h \in H\} \subseteq G$

e $\tilde{K} = \{(1, k) / k \in K\} \subseteq G$

Chiusamente G è il prodotto diretto di $\tilde{H}$ e $\tilde{K}$

che sono sottogruppi normali di G isomorfi a H e K .

In conclusione: ora scriviamo $G = H \times K$.

(es.) $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dove $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ e $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

• $\mathbb{Z}_6 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_2$

• Prodotto semidiretto di 2 gruppi

- Sia G un gruppo, H, K 2 sotto gruppi t.c.
 - i) $H \cap K = \{1\}$
 - ii) $G = H \cdot K$ cioè $\forall g \in G \exists h \in H, k \in K$ t.c. $g = h \cdot k$
 - iii) $H \trianglelefteq G$ H normale in G .

Allora diciamo che G è il prodotto semi diretto di H e K , con H normale in G , e scriviamo

$$G = H \rtimes K \quad \text{oppure} \quad G = H \rtimes_{\psi} K \quad \text{dove}$$

$$\psi: K \longrightarrow \text{Aut}(H) \quad \text{è un morf. di gruppi.}$$

$$k \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad} & H \\ h & \longmapsto & khk^{-1} \end{array} \right)$$

- Siano H, K due gruppi, e $\exists \psi: K \longrightarrow \text{Aut}(H)$
un morfismo di gruppi. $k \longmapsto (\psi_k: H \rightarrow H)$

Chiamiamo prodotto semi diretto di H e K secondo ψ

il gruppo $G = H \rtimes_{\psi} K$: insieme $H \times K$,

$$\text{prodotto } (h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 \psi_{k_1}(h_2), k_1 \cdot k_2)$$

(EX: Verificare che è un gruppo).

In G abbiamo $\tilde{H} = \{(h, 1) / h \in H\} \subset G$ sottogruppo

$\tilde{K} = \{(1, k) / k \in K\} \subset G$ sottogruppo

t.c. $\tilde{H} \cap \tilde{K} = \{1\}$, $G = \tilde{H} \cdot \tilde{K}$, $\tilde{H} \trianglelefteq G$, $\tilde{H} \cong H$ e $\tilde{K} \cong K$.

es) • Sia $G = D_n$ gruppo diedrale, ordine $2n$.

Sia $H \subset G$ il sottogruppo delle rotazioni, $H \cong \mathbb{Z}_n$.

Sia $\sigma \in G$ una riflessione, e sia

$$K = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma\} \subset G, \quad K \cong \mathbb{Z}_2.$$

Allora $H \cap K = \{1\}$, $H \cdot K = G = \{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma\}$

$H \trianglelefteq G$ perché ha indice 2.

$$\psi_\sigma: H \longrightarrow H$$

$$\rho \longmapsto \sigma \rho \sigma = \rho^{-1}$$

$$\Rightarrow D_n = \mathbb{Z}_n \rtimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 \quad \text{dove} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\psi} & \text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \\ 1 & \longmapsto & \text{id}_{\mathbb{Z}_n} \\ -1 & \longmapsto & (\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n) \\ & & \bar{m} \mapsto -\bar{m} \end{array}$$

• Sia $H = k^n$ spazio vett. / k (gruppo additivo)

Sia $K = GL_n(k)$ gruppo lineare

$$\psi: K \longrightarrow \text{Aut}(H)$$

$$g \in GL_n(k) \longmapsto (g: k^n \rightarrow k^n)$$

$$H \rtimes K = \{ (v, \varphi) / v \in k^n, \varphi \in GL_n(k) \} = \text{Aff}(A_k^n)$$

$$(v_1, \varphi_1) \cdot (v_2, \varphi_2) = (v_1 + \varphi_1(v_2), \varphi_1 \circ \varphi_2)$$

$$F(x) = v_2 + \varphi_2(x)$$

$$G(x) = v_1 + \varphi_1(x)$$

$$G(F(x)) = v_1 + \varphi_1(v_2 + \varphi_2(x)) = v_1 + \varphi_1(v_2) + \varphi_1 \circ \varphi_2(x)$$