

§ 3.3 Coniche euclidee

(180)

Le coniche euclidee sono coniche (eq. come per le affini ma in $\mathbb{R}[x, y]$) in uno spazio euclideo, consideriamo E^2 con riferimento euclideo canonico.

Le vogliamo classificare per congruenza:

$$\text{Cong}(E^2) = O_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \quad (\text{isom. rotazionali + traslazioni})$$

$$\begin{aligned} f: E^2 &\longrightarrow E^2 & f &= f_{M, c} \quad \text{con } M \in O_2(\mathbb{R}) \text{ e } c \in \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c & \tilde{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & M \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Osserviamo che nel teorema di classificazione affine, per i passi I e II abbiamo usato solo traslazioni.

$\Rightarrow$ Possiamo effettuare le stesse operazioni facendo attenzione ai coefficienti.

Gli invarianti per congruenza (isometrie) sono detti invarianti metrici: (es.) $\text{sg}(C)$, $\text{sg}_0(C)$

$\text{sgn}(\det(A_0)) \cdot \boxed{EX}$. Anche (i) $\frac{\det(A)^2}{\det(A_0)^3} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{\text{indet}\}$

(ii) $\det(A_0) \nmid (A)^2$ (iii) $\frac{\det(A)}{\det(A_0)^3}$

Teor: Forme canoniche di coniche euclidee in E^2
 con $a, b, p \in \mathbb{R}^+$:

$$C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad a \geq b > 0 \quad \text{ellisse generale} \\ (\text{2 pti reali})$$

$$C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad a \geq b > 0 \quad \text{ellisse gen. 2 pti immag.}$$

$$C_3: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad a > 0, b > 0 \quad \text{iperbole generale}$$

$$C_4: y^2 - 2px = 0 \quad p > 0 \quad \text{parabola generale}$$

$$C_5: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad a \geq b > 0 \quad \text{ellisse degenera}$$

$$C_6: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad a \geq b > 0 \quad \text{iperbole degenera}$$

$$C_7: y^2 - a^2 = 0 \quad a > 0 \quad \text{parabola sempl. deg.} \\ (\text{2 pti reali})$$

$$C_8: y^2 + a^2 = 0 \quad a > 0 \quad \text{parabola sempl. deg.} \\ \text{2 punti immaginari.}$$

$$C_9: y^2 = 0 \quad \text{parabola doppiamente degenera.}$$

Cioè: ogni conica euclidea è congruente
 (isometricamente equivalente) ad una del tipo

C_i con $1 \leq i \leq 9$ per opportuni $a, b, p \in \mathbb{R}^+$

e queste sono 2 a 2 non congruenti: //

Dim: Seguiamo i passi I e II della classif.

affine (per il passo I diagonalizzare con il tor. spettrale su $\mathbb{R}^2$). Otteniamo eq. tipo:

• a centro: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + d_{00} = 0$

secondo del segno di a_{11} e a_{22} e di d_{00} otteniamo tutte le curve a centro del terreno:

p. es. $d_{00} \neq 0$ possiamo supporre $d_{00} = -1$,

se $a_{11}, a_{22} > 0$ scriviamo $\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}})^2}x^2 + \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{a_{22}}})^2}y^2 = 1$

e così via.

• parabole: eq. tipo $a_{22}y^2 + d_{00} = 0$

oppure $a_{22}y^2 + 2a_{01}x = 0$

e otteniamo tutte le equazioni nella tabella ~~che sopra~~

Bisogna mostrare che ~~non~~ sono 2 a 2 non

congruenti. Chiameremo quelle del tipo

C_i non sono congruenti a quelle tipo C_j ($i \neq j$)

perché non sono affinemente equivalenti.

Ricordiamo che degli invarianti isometrici sono:

$$\frac{\det(A)^2}{\det(A_0)^3}, \quad \frac{\det(A_0)}{\text{Tr}(A_0)^2}, \quad \frac{\det(A)}{\text{Tr}(A_0)^3}, \quad \frac{\det(A)}{\det(A_0)}$$

Verifichiamo che le coniche in $\mathbb{C}$, sono 2 a 2

non congruenti:

siano $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ e $D: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$

con $a \geq b > 0$ e $\alpha \geq \beta > 0$ e $(a, b) \neq (\alpha, \beta)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1/a^2 & \\ & & 1/b^2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1/\alpha^2 & \\ & & 1/\beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{-1}{a^2 b^2}$$

$$\det(B) = \frac{-1}{\alpha^2 \beta^2}$$

$$\det(A_0) = \frac{1}{a^2 b^2}$$

$$\det(B_0) = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2}$$

supponiamo
e e D
congruenti,
mostriamo che
 $(a, b) = (\alpha, \beta)$

$$\Rightarrow a^2 b^2 = \frac{\det(A)^2}{\det(A_0)^3} = \frac{\det(B)^2}{\det(B_0)^3} = \alpha^2 \beta^2$$

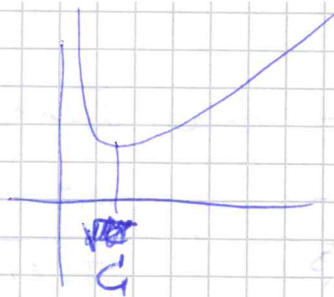
$$\Rightarrow a \cdot b = \alpha \cdot \beta = C \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Inoltre } a \geq b \text{ e } \alpha \geq \beta$$

$$\frac{\text{Tr}(A_0)}{\det(A_0)} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{\det(A_0)}{\text{Tr}(A_0)^2} = a^2 b^2 \cdot \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{\det(B_0)}{\text{Tr}(B_0)^2} = \alpha^2 \beta^2 \cdot \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \beta = C = a \cdot b \\ \alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a^2 + \frac{C^2}{a^2} &= \alpha^2 + \frac{C^2}{\alpha^2} \\ \frac{(a^2 + C^2/a^2) \cdot a^4}{a^4} &= \frac{(\alpha^2 + C^2/\alpha^2) \cdot \alpha^4}{\alpha^4} \end{aligned}$$

Consideriamo $R^+ \xrightarrow{\gamma} R^+$
 $x \mapsto \frac{x^2 + c^2}{x^2}$



(184)

$$\gamma' = \frac{2x^2 - x^2 - c^2}{x^3} = \frac{x^2 - c^2}{x^3}$$

minimo in $\sqrt{c^2}$, $x^2 = c^2$
 strett. crescente in $x \geq c$

ma ricordiamo che $a \geq b$, quindi $a \geq \frac{c}{a}$, $a^2 \geq c^2$

$$\Rightarrow \frac{(a^2)^2 + c^2}{(a^2)^3} = \frac{(x^2)^2 + c^2}{(x^2)^3}$$

allora $a^2 = x^2$ e $a = x$
 e $b = \frac{c}{a} = \frac{c}{x} = \beta$

In modo analogo si ottiene che tutte

le coniche in C_5 sono 2 a 2 disgiunte e non congruenti.

In alcuni casi non bastano gli invarianti:

es. C_7 e C_8 : $A = \begin{pmatrix} \pm a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \pm b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & M \end{pmatrix} \quad M \in O(2) \quad {}^t \tilde{M} A \tilde{M} = \begin{pmatrix} -a^2 + {}^t A_0 c & {}^t A_0 M \\ {}^t M A_0 c & {}^t M A_0 M \end{pmatrix}$$

quindi ${}^t M \tilde{M} A \tilde{M} = \alpha B$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow A_0 \cdot c = 0$

$$\text{e } {}^t \tilde{M} A \tilde{M} = \begin{pmatrix} \pm a^2 & 0 \\ 0 & {}^t M A_0 M \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \pm b^2 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix} = \alpha B$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^t \tilde{M} A \tilde{M}) = \alpha \text{Tr}(B)$$

$$\text{Tr}(A_0) = \text{Tr}({}^t M A_0 M) = \alpha \text{Tr}(B_0)$$

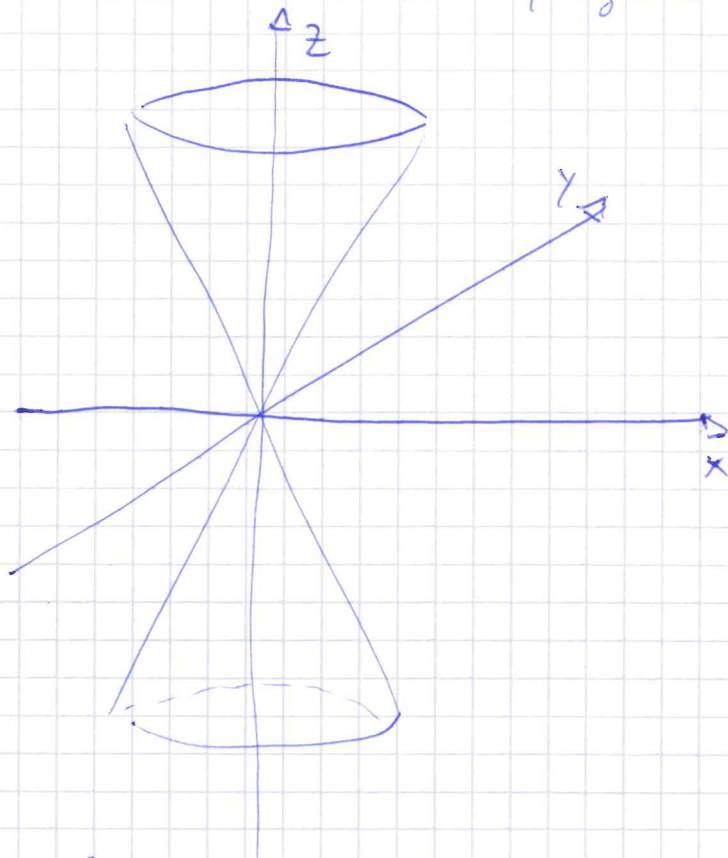
$$\Rightarrow \frac{\text{Tr}(A)}{\text{Tr}(A_0)} = \pm a^2 + 1 = \frac{\text{Tr}(B)}{\text{Tr}(B_0)} = \pm b^2 + 1 \Rightarrow a = b$$

§3.4 Proprietà Geometriche delle coniche evol.

(185)

prendiamo un cono in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0$

$\alpha > 0$



intersechiamolo con un piano $z = Ay + C$

• $A=0 \rightsquigarrow$ circonfer. $x^2 + y^2 = (\alpha C)^2$ $\frac{x^2}{(\alpha C)^2} + \frac{y^2}{(\alpha C)^2} = 1$
saggio αC

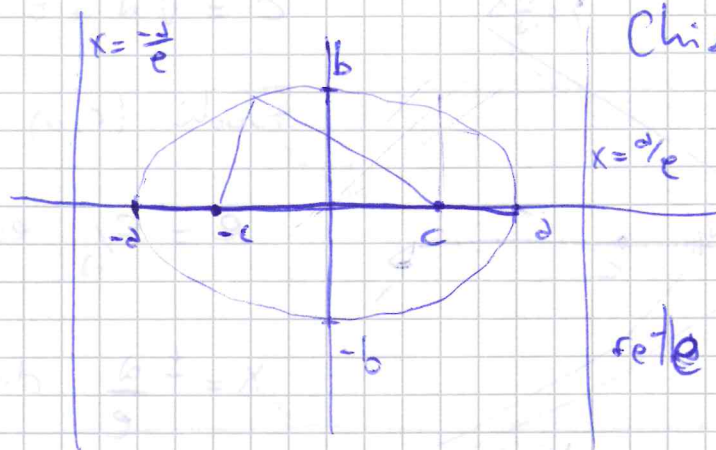
• $A \neq 0$ $x^2 + (1 - \alpha^2 A^2) y^2 - 2\alpha^2 ACy - \alpha^2 C^2 = 0$
 $\rightsquigarrow$ ellissi e iperboli e $(A = \frac{1}{\alpha})$ parabole

• $C=0$ $x^2 + (1 - \alpha^2 A^2) y^2 = 0$ degenera

Geometria delle coniche euclidee (a pt. reali).

(19/3)

1) Sia $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a \geq b > 0$ ELLISSE



Chiamiamo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$(c, 0)$ e $(-c, 0)$ i focchi.

$e = \frac{c}{a}$ eccentricità.

rette $x = \pm \frac{a}{e}$ direttrici.
o $e < 1$

per disegnare un ramo: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

(p.es. $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ha deriv. pos. e seconda negativa
max in $(0, b)$ e min in $(a, 0)$ ecc...)

Eq. parametriche: $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

2) Iperbole $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > 0, b > 0$

C simmetrica rispetto ai 2 assi coordinati.

C non ha punti sull'asse delle y : $x=0$

C incontra l'asse delle x in $(a, 0)$ e $(-a, 0)$

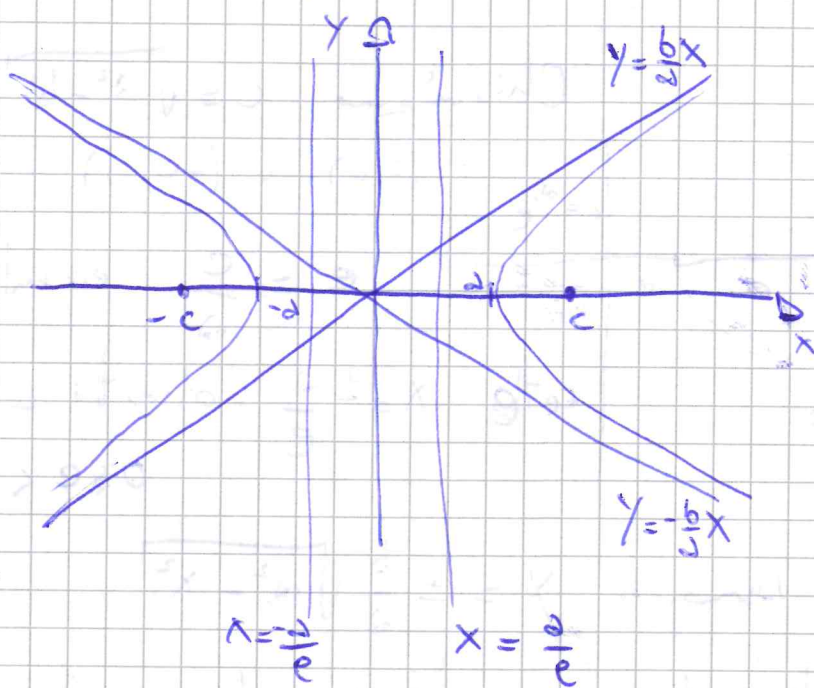
C non ha soluzioni con $|x| < a$

$\Rightarrow C$ ha 2 rami: $\text{ip}C = (C \cap \Sigma_+) \cup (C \cap \Sigma_-)$

con $\Sigma_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq a\}$ e $\Sigma_- = \{x \leq -a\}$

possiamo risolvere la y in $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ (194)

Vediamo che $\left| \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right| < \left| \frac{bx}{a} \right|$



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Fuochi $(c, 0), (-c, 0)$

$e = c/a$ eccentricità

$x = \pm \frac{a}{e}$ direttrici

$$e > 1$$

Prop: L'ellisse (l'iperbole) ha per supporto il luogo dei punti $P \in \mathbb{R}^2$ le cui distanze dai 2 fuochi hanno somma (modulo della differenza) costante uguale a $2a$.

Dim: $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$ $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|d(P, F) \pm d(P, F')| = 2a \Leftrightarrow \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

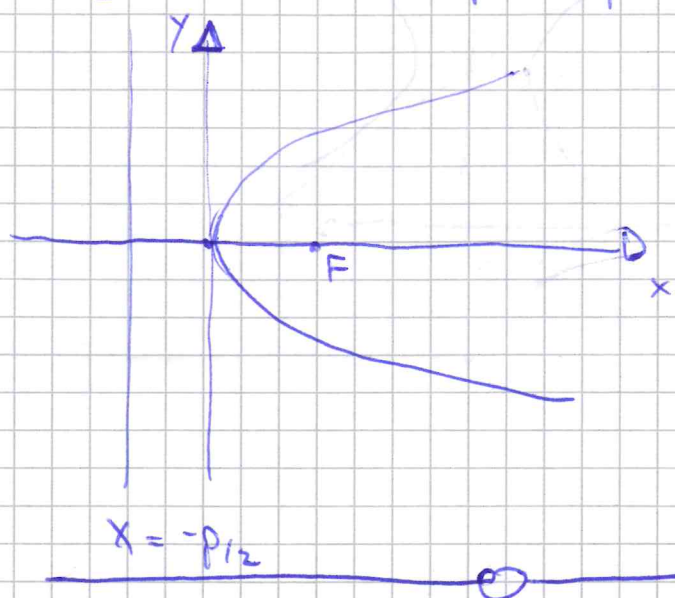
$$\Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1 \quad \text{con } c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ellisse}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ iperbole.} \quad \blacksquare$$

Eq. param. $\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = -a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

3) Parabola $C: y^2 = 2px \quad p > 0$



Fuoco $F = (p/2, 0)$

Direttrice $x = -p/2$

Eccentricità $e = 1$

Eq. param. $\begin{cases} x = \frac{1}{2p} t^2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Prop. l'ellisse, l'iperbole, la parabola hanno per supporto il luogo dei punti le cui distanze da un fuoco e dalla rispettiva direttrice hanno rapporto costante, uguale all'eccentricità e .

Dim. $P = (x, y)$, $F = (\pm c, 0)$ con $\begin{cases} c = \sqrt{a^2 - b^2} & \text{ellisse} \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{iperbole} \\ c = p/2 & \text{parabola} \end{cases}$
direttrice $x = \pm \frac{a}{e}$ ellisse iperb. / $x = -p/2$ par.

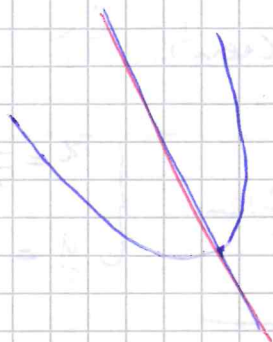
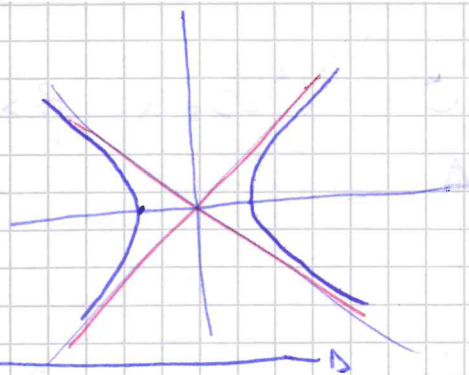
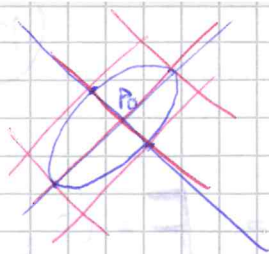
$$\frac{\sqrt{(x \mp c)^2 + y^2}}{|x \mp a/e|} = e \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\sqrt{(x \mp c)^2 + y^2}}{|ex \mp a|} = 1} \quad \begin{array}{l} \text{anche} \\ \text{per} \\ e=0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \mp 2xc + c^2 + y^2 = e^2 x^2 \mp 2eax + a^2 \quad e a = c$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 = \pm (c - ea)2x + (a^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a^2(1 - e^2)}_{a^2(1 - \frac{c^2}{a^2})} x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (\text{OK})$$

anche per $e=0$ OK (circonferenza)



Dato una conica (non degenere) qualsiasi,
come troviamo il centro (se è un centro),
gli assi di simmetria, ecc?

1°: abbiamo visto se C è una conica a centro
come trovare il centro di simmetria;

centro è $C_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ t.c. $A_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{d}{2} = 0$.

Ricordiamo che $C: (x \ y) \begin{pmatrix} a_{00} & t_{01} \\ t_{01} & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Osserviamo che A_0 è simmetrica $\Rightarrow$ ortogonalmente diagon.

$\Rightarrow A_0$ ammette 2 autovalori (λ, μ) con

(λ, μ) non entrambi nulli, eventualmente coincidenti

$\det(A_0) = \lambda\mu \Rightarrow \begin{cases} \text{C ellisse} \Leftrightarrow \lambda\mu > 0 \\ \text{C iperb.} \Leftrightarrow \lambda\mu < 0 \\ \text{C parab.} \Leftrightarrow \lambda\mu = 0 \end{cases}$

Def. Siano $V_\lambda(A_0)$ gli autospazi $V_\mu(A_0)$.

i) Se $\lambda \neq \mu$ $V_\lambda(A_0)$ e $V_\mu(A_0)$ 2 rette ortogonali

ii) Se $\lambda = \mu$ (C circonferenza o ellisse)

$$V_\lambda(A_0) = V_\mu(A_0) = \mathbb{R}^2$$

Osserv. Una conica individuata A_0 a meno di proporzionalità. Quindi (λ, μ) sono individuati a meno di cost. di proporzionalità.

Pero $V_\lambda(A_0)$ e $V_\mu(A_0)$ dipendono solo da C :

$$\begin{aligned} \text{infatti } v \in V_\lambda(A_0) &\Leftrightarrow A_0 v = \lambda v \Leftrightarrow (\alpha A_0)(v) = \alpha \lambda v \\ &\Leftrightarrow v \in V_{\alpha \lambda}(\alpha A_0) \end{aligned}$$

Def si chiamano $E_\lambda(C)$, $E_\mu(C)$ autosp. della conica

ii) Se C è una conica a centro, $G_0 \in \mathbb{R}^2$ centro di C

• se $\lambda \neq \mu$ le rette $G_0 + E_\lambda(C)$, $G_0 + E_\mu(C)$

sono dette assi della conica C

• Se $\lambda = \mu$ ogni retta per G_0 è "asse della conica".

Prop 1: Sia C una conica a centro.

Sia r un asse della conica C ,

Sia $f: E^2 \rightarrow E^2$ la simmetria di asse r .

Allora $f^{-1}(C) = C$. $f^*C = f^{-1}C$

Dim: Sia $g: E^2 \rightarrow E^2$ congruenza, sappiamo che se P_0 è centro di C

e Q_0 è il centro di $g^*(C)$, allora $g(Q_0) = P_0$

le $g = \frac{1}{M} \in O_2(\mathbb{R})$

e $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ allora $\varphi(E_\lambda(f^*C)) = E_\lambda(C)$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

infatti gli autovalori di A_0 e ${}^t M A_0 M$ sono gli stessi

e se v verifica ${}^t M A_0 M v = \lambda v$

allora Mv verifica $A_0(Mv) = \lambda(Mv)$.

Quindi una congruenza manda centro in centro

e asse in asse $\Rightarrow$ basta verificare

che gli asse sono assi di simmetria

per le coniche in forma canonica.

OK



Prop 2: Sia C una parabola euclidea.

Nel fascio di rette parallele con giacitura $E_0(C)$, esiste una e una sola retta r tale che

$f^r C = C$ per $f: E^2 \rightarrow E^2$ simmetria con asse r , questa retta è detta asse di simmetria della parabola C .

Se C è non degenera $\text{Supp}(C) \cap r$ è un punto detto vertice di C .

Dim: Come sopra, basta verificarlo per le coniche in forma canonica. ✓

Esercizio: Sia C la conica di equazione

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y = 0.$$

- i) Determinare che classe di conica si tratta
- ii) Determinare assi di simmetria e vertice se poss.
- iii) Determinare una forma canonica.

Svolgimento: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det A = -4$
 $\Rightarrow C$ non-deg.

$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det A_0 = 0 \Rightarrow C$ parabola generale.

Autospazio per A_0 :

$$E_0(e) = V_0(A_0) = \ker(A_0) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3(e) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

l'asse di sim. ha giacitura $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

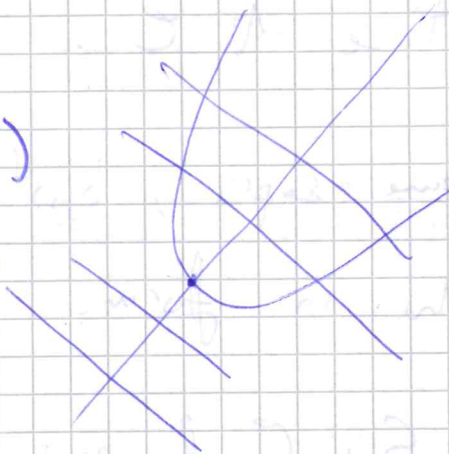
troviamo il vertice: intersezione con retta $\parallel$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$r: 2x - y + C = 0$$

e cerchiamo quando $\text{Supp}(e)$

incontra r in un unico pto.

quella sarà il vertice.



$$\begin{cases} y = 2x + C \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow (x + 2y)^2 + 4y = (5x + 2C)^2 + 8x + 4C =$$

$$= 25x^2 + 20Cx + 8x + 4C(1 + C) =$$

$$= 25x^2 + (20C + 8)x + 4C(1 + C) = 0$$

$$\Delta = (20C + 8)^2 - 400C(1 + C) = 320C + 64 - 400C = 0$$

$$80C = 64 \Rightarrow C = \frac{4}{5}$$

$$V = \left(-\frac{12}{25}, -\frac{4}{25} \right)$$

$$25x^2 + 24x + \frac{16}{5} \left(\frac{9}{5} \right) = 0$$

$$\left(5x + \frac{12}{5} \right)^2 = 0$$

$\frac{144}{25}$

l'asse di simmetria è $\Gamma = V + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

e ha equazione: $x + 2y + d = 0$ con $V \in \Gamma$:

$$-\frac{12}{25} - \frac{8}{25} + d = 0 \Rightarrow d = \frac{4}{5} \quad \Gamma: x + 2y + \frac{4}{5} = 0.$$

Forma canonica?

Sappiamo $M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Cambiamo variabile $X = (2x' + y') \frac{1}{\sqrt{5}} \quad Y = \frac{1}{\sqrt{5}} (-x' + 2y')$

Sostituiamo in $F(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y = 0$

$$\Rightarrow F(x', y') = \frac{1}{5} (2x' + y')^2 + \frac{4}{5} (2x' + y')(-x' + 2y') + \\ + \frac{4}{5} (-x' + 2y')^2 + \frac{4}{\sqrt{5}} (-x' + 2y') =$$

$$= \frac{1}{5} (25y'^2 - 4\sqrt{5}x' + 8\sqrt{5}y')$$

$\Rightarrow$ forma canonica $y'^2 - 2\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)x' = 0$ //

(Quindi, se $f: E^2 \rightarrow E^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}C: 25y'^2 - 4\sqrt{5}x' + 8\sqrt{5}y' = 0$$

3.5 Dimensione superiore: quadriche.

Analogamente a quanto fatto per le coniche possiamo classificare le quadriche proiettive, affini, ed euclidee.

Def. Una quadrica proiettiva in $\mathbb{P}_k^n$ (rispettivamente affine in A_k^n , euclidea in E^n) è una classe di equivalenza per proporzionalità di un polinomio omogeneo di grado 2 in $k[x_0, \dots, x_n]$ (risp. di un polinomio di grado 2 in $k[x_0, \dots, x_n]$ e in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$).

Come per le coniche:

$$Q: \sum_{j=0}^n a_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad \text{quadra in } \mathbb{P}_k^n$$

$\leadsto$ matrice $A \in M_{(n+1) \times (n+1)}(k)$ della f. quadratic

quadrica proiettivamente equivalente $\Leftrightarrow \exists P \in GL_{n+1}(k)$ tale che ${}^t P A P = \alpha B$ $\alpha \in k^*$
 $\text{rg}(Q) = \text{rg}(A)$ invariante proiettivo.

Classificazione a meno di equivalenza proiettivo:

$k = \mathbb{C}$ dipende solo dal $\text{rg}(Q) = r$:

forma canonica $Q_{r,n}: x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0$ in $\mathbb{P}_k^n$

$k = \mathbb{R}$ $\text{sgn}(A) = (p, q)$ con $p \geq q, p+q=r$

forma canonica $Q_{p,q,n}: x_0^2 + \dots + x_{p-1}^2 + x_p^2 - \dots - x_{p+q-1}^2 = 0$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$

Quadriche affini in A_n^u

$$Q: \sum_{j=1}^n a_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^n a_{0j} x_j + a_{00} = 0$$

$${}^t \tilde{x} A \tilde{x} = 0 \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t \underline{a} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix} \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R}) \text{ simmetrica}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad a_{00} \in \mathbb{R} \text{ termine noto} \quad \underline{a} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{Trasf. aff.} \iff \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{\epsilon} & M \end{pmatrix} \text{ con } M \in GL_n(\mathbb{R}) \\ \underline{\epsilon} \in \mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$$

Trasf. euclidea (o isometrie, o congruenze) :=

$$\text{trasf. affini con } \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{\epsilon} & M \end{pmatrix} \quad M \in O_n(\mathbb{R}) \quad \underline{\epsilon} \in \mathbb{R}^n$$

$Q: {}^t \tilde{x} A \tilde{x} = 0$ è affine equiv. $\downarrow$ $Q': {}^t \tilde{x} B \tilde{x} = 0$

$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}^n, \exists \tilde{M} \text{ trasf. affine t.c. } {}^t \tilde{M} A \tilde{M} = \alpha B$$

$Q: {}^t \tilde{x} A \tilde{x} = 0$ è congruente $\downarrow$ $Q': {}^t \tilde{x} B \tilde{x} = 0$

$$\iff \exists \text{ congruenza } \tilde{M}, \alpha \in \mathbb{R}^n / {}^t \tilde{M} A \tilde{M} = \alpha B.$$

Teor.: Ogni quadrica non degenera di A_k^n (204)
 è affinemmente equiv. a una e una sola di:

$$1) \quad k = \mathbb{R} \quad i) \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0$$

$$ii) \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_n = 0$$

$$2) \quad k = \mathbb{R} \quad i) \quad \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2 = 1 \quad p=0, \dots, n$$

$$ii) \quad \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{n-1} x_j^2 - x_n = 0 \quad p=1, \dots, n-1$$

3) Ogni quadrica euclidea non degenera è
 congruente ad una e una sola delle seguenti:

$$i) \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^n \alpha_j x_j^2 = 1 \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_p > 0$$

$$\alpha_{p+1} \geq \alpha_{p+2} \geq \dots \geq \alpha_{p+n} > 0$$

$$p=0, \dots, n$$

$$ii) \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{n-1} \alpha_j x_j^2 - x_n = 0 \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_p > 0$$

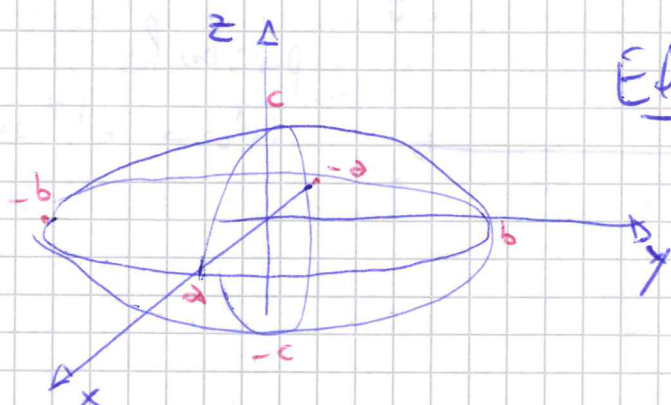
$$\alpha_{p+1} \geq \dots \geq \alpha_{n-1} > 0$$

$$p=1, \dots, n-1$$

Dim.: Simile alle coniche, diagonalizzare A_0 ,
 (nel caso euclideo: teor. spettrale), poi traslare.
 (Vedi Serres).

Interessante: la geometria delle quadriche euclidee in E^3 (a punti reali):

i)

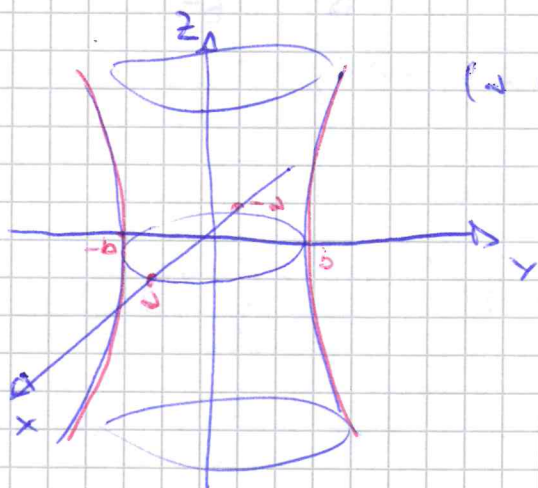


Ellissoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(a \geq b \geq c > 0)$$

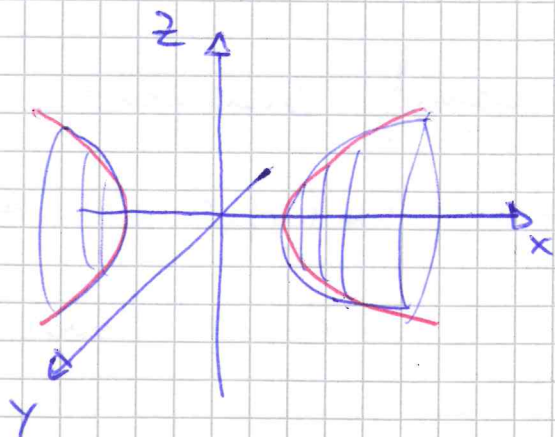
ii) Iperboloidi iperbolici: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\begin{matrix} a \geq b > 0 \\ c > 0 \end{matrix}$



(a una foglia)

facciamo "rotore" un'iperbole intorno all'asse delle z .

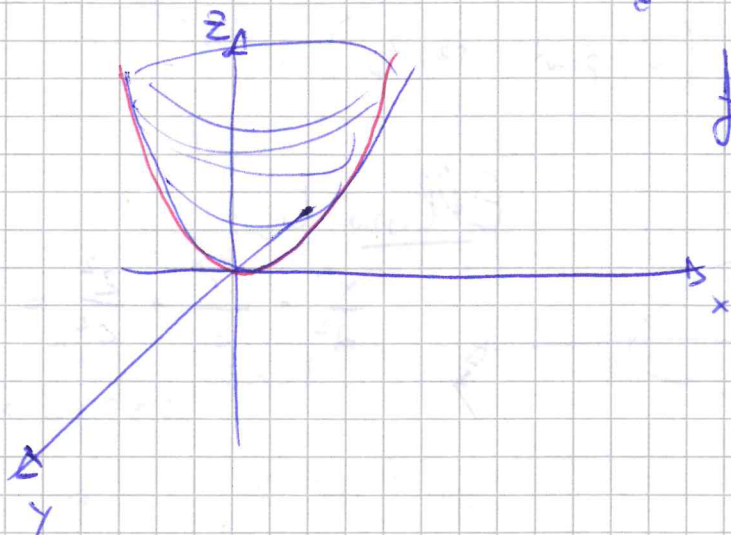
iii) Iperboloidi ellittici: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



(a due foglie)

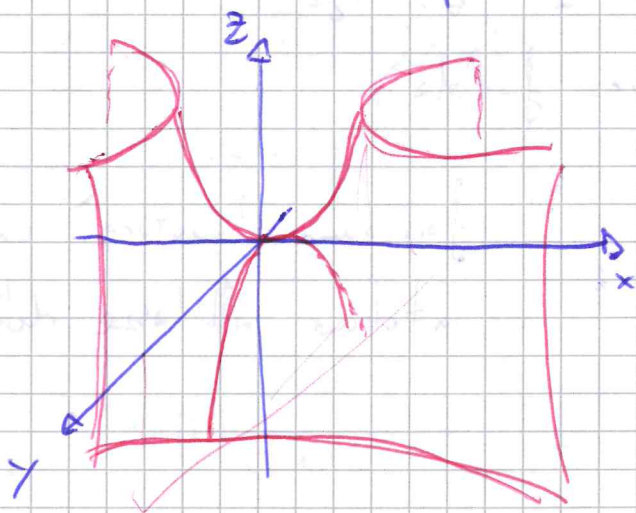
facciamo "rotore" un'iperbole intorno all'asse delle x

15) Paraboloida ellittico : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$



facciamo "rotore" una
parabola
intorno all'asse delle z

16) Paraboloida iperbolico : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$



§ 3.6 - Altre proprietà geometriche di coniche, quadriche e ipersuperfici.

(207)

• Intersezione con una retta:

Sia Y un'ipersuperficie di $\mathbb{P}_k^n$ di equazione $F(\underline{x})=0$ con $\underline{x}=(x_0, \dots, x_n)$ e $F \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ pol. omog. di grado d . Sia $r \subset \mathbb{P}_k^n$ una retta proiettiva.

Scegliendo due punti in r , $R=[r_0: \dots: r_n]$ e $Q=[q_0: \dots: q_n]$ (e fissati rapp. per le loro coordinate) otteniamo $r = \{ \lambda R + \mu Q \mid [\lambda: \mu] \in \mathbb{P}_k^1 \}$

Quindi i punti in $r \cap \text{Supp}(Y)$ sono dati:

$$d \Rightarrow G(\lambda, \mu) = F(\lambda R + \mu Q) = F(\lambda r_0 + \mu q_0, \dots, \lambda r_n + \mu q_n) = 0.$$

Allora se $r \subseteq \text{Supp}(Y)$ $G(\lambda, \mu) \equiv 0$

Altrimenti: $G(\lambda, \mu)$ è pol. omogeneo di grado d .

$\Rightarrow$ Se $k=\bar{k}$ G è un prodotto di d fattori

omogenei lineari

$\Rightarrow G(\lambda, \mu)=0$ ammette d radici omogenee (contate con molteplicità).

(Se $k=\mathbb{R}$ $G(\lambda, \mu)$ avrà al più d radici omogenee reali, etc. ...)

Se $P_0 = \lambda_0 R + \mu_0 Q$ con (λ_0, μ_0) radice di $Q(\lambda, \mu)$ (208)
 con molteplicità m , diciamo che

" γ e r hanno molteplicità di intersezione m in P_0 "

e scriviamo $I(\gamma, r, P_0) = m$. ^{Ben posto: non dipende da R, Q .}

Se $P \notin \text{Supp}(\gamma)$ o r poniamo $I(\gamma, r, P) = 0$

e se $r \subseteq \text{Supp}(\gamma)$ poniamo $I(\gamma, r, P) = \infty$.

Osserv. i) Se $g: \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ è una proiettività,

$g^* \gamma: F(g(x)) = 0$ è la ipersuperficie

con $\text{supp}(g^* \gamma) = g^{-1}(\text{Supp}(\gamma))$,

e $g_* \gamma = (g^{-1})^* \gamma$ è l'ipersup. con supporto

$\text{supp}(g_* \gamma) = g(\text{Supp}(\gamma))$,

Allora abbiamo $I(\gamma, r, P) = I(g_* \gamma, g(r), g(P)) =$
 $= I(g^* \gamma, g^{-1}(r), g^{-1}(P))$.

ii) Se $k = \bar{k}$ e $r \subseteq \mathbb{P}_k^n$ retta t.c. $r \not\subseteq \text{Supp}(\gamma)$

allora $\sum_{P \in r} I(\gamma, r, P) = d$.

(in generale $\leq d$)

iii) Analogamente si può definire l'intersezione di una
 retta affine con un'ipersuperficie affine.

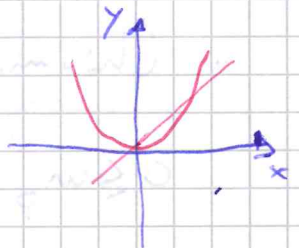
Def: Sia $\mathcal{Y}$ un'ipersuperficie proiettiva di $\mathbb{P}^n$ (209)
 e sia $r \subset \mathbb{P}^n$ una retta. Diciamo che
 "r è tangente a $\mathcal{Y}$ in $P \in \mathbb{P}^n$ " se $I(\mathcal{Y}, r, P) \geq 2$.

Ques: Se $P = [p_0 : \dots : p_n]$ e $\mathcal{Y} = [F]$ con $F \in k[x_0, \dots, x_n]$

Allora $\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{P}^n \\ r \text{ tg. a } \mathcal{Y} \text{ in } P}} r = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid \frac{\partial F}{\partial x_0}(p_0, \dots, p_n)x_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(p_0, \dots, p_n)x_n = 0 \right\}$

DEF: $\bigcup_{\substack{r \in \mathbb{P}^n \\ r \text{ tg. a } \mathcal{Y} \text{ in } P}} r =: T_P \mathcal{Y}$ è detto "spazio tangente a $\mathcal{Y}$ in P ".

(es) $\mathcal{C}: yz - x^2 = 0$ $P = [0:0:1]$



Una retta per P ha equazione $r_{\lambda, \mu}: \mu x - \lambda y = 0$

e eq. parametriche $r_{\lambda, \mu} = \{ [\lambda t_0 : \mu t_0 : t_1] \mid [t_0 : t_1] \in \mathbb{P}^1 \}$

• se $\mu \neq 0$ $r_{\lambda, \mu} = r_{\lambda, 1}: x - \lambda y = 0$
 supp $\mu = 1$

$r_{\lambda, 1} \cap \text{Supp}(\mathcal{C}): t_0 t_1 - \lambda^2 t_0^2 = t_0(t_1 - \lambda^2 t_0) = 0$

$P = [0:0:1] \Leftrightarrow t_0 = 0 \Rightarrow I(\mathcal{C}, r_{\lambda, 1}, P) = 1$

se $\mu = 0$ $r_{\lambda, 0}: y = 0$ $r_{\lambda, 0} = \{ [t_0 : 0 : t_1] \mid [t_0 : t_1] \in \mathbb{P}^1 \}$

$r_{\lambda, 0} \cap \text{Supp}(\mathcal{C}): t_0^2 = 0$

$\Rightarrow I(\mathcal{C}, r_{\lambda, 0}, P) = 2$

$\Rightarrow T_P \mathcal{C} = r_{\lambda, 0}: \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 1) \cdot y = 0$

Abbiamo visto $T_P \mathcal{Y} : \frac{\partial F}{\partial x_0}(p_0, \dots, p_n) x_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(p_0, \dots, p_n) x_n = 0$ (210)

Allora se $\nabla F(P) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(p_0, \dots, p_n), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(p_0, \dots, p_n) \right) \neq 0$

$T_P \mathcal{Y}$ è un iperpiano

Altrimenti $T_P \mathcal{Y} = \mathbb{P}_k^n$

Def. Chiamiamo $\text{sing}(\mathcal{Y}) = \{ P \in S_{pp}(\mathcal{Y}) / \nabla F(P) = 0 \}$

• Chiamiamo $\mathcal{Y}$ iperficie "non-singolare" o "liscia" se $\text{sing}(\mathcal{Y}) = \emptyset$.

• Chiamiamo "multiplicità di $\mathcal{Y}$ in P " l'intero

$$0 \leq m_P(\mathcal{Y}) = \min_{r \ni P} I(\mathcal{Y}, r, P) \leq d$$

Ob: i) $0 \leq m_P(\mathcal{Y}) \leq d$ e $m_P(\mathcal{Y}) = 0 \Leftrightarrow P \notin S_{pp}(\mathcal{Y})$

ii) $g: \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ proiettività

$$m_P(\mathcal{Y}) = m_{g^{-1}(P)}(g^*\mathcal{Y}) = m_{g(P)}(g_*\mathcal{Y})$$

iii) Stesse definizioni nel caso affine:

$r \in \mathbb{A}_k^n$ tangente in $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Y}: F(x) = 0 \Leftrightarrow I(\mathcal{Y}, r, \mathcal{P}) \geq 2$

$$T_P(\mathcal{Y}) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(p_1, \dots, p_n)(x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(p_1, \dots, p_n)(x_n - p_n) = 0$$

Sia $P \in \mathbb{P}_k^n$ con $P \in \text{Supp}(\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y} = [F]$, $F \in k[x_0, \dots, x_n]_d$ (21)

Si possono sempre scegliere delle coord. proiettive

$$R = \mathbb{RP}(P_0, P_1, \dots, P_n, U) \text{ con } P_0 = U$$

in R , $\mathcal{Y}$ ha equazione $G(x_0, \dots, x_n) = 0$

$$\text{e } P_0 = P = [1:0:\dots:0]$$

$$\mathcal{Y} \cap U_0: G(1, x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ dove } \tilde{G} = G(1, x_1, \dots, x_n)$$

$\tilde{G}$ polinomio in $k[x_1, \dots, x_n] \leq d$.

$$\text{Possiamo scrivere } \tilde{G} = G_m(x_1, \dots, x_n) + G_{m+1}(x_1, \dots, x_n)t + \dots + G_d(x_1, \dots, x_n)$$

con $G_j(x_1, \dots, x_n)$ pol. omogeneo di grado j ,

$$\text{e } G_m(x_1, \dots, x_n) \neq 0, \quad 1 \leq m \leq d$$

L'ipersuperficie affine in U_0 , di equazione

$$G_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ è detta}$$

"cono tangente (affine) a $\mathcal{Y}$ in P ".

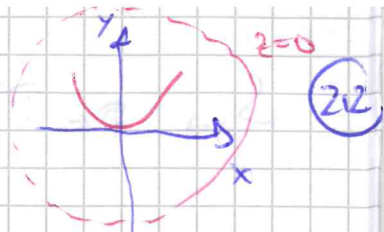
La sua chiusura in $\mathbb{P}_k^n$ ha equazione $G_m(x_1, \dots, x_n) = 0$

ed è l'unione di tutte le rette proiettive per P

$$\text{con } I(\mathcal{Y}, r, P) > m_P(\mathcal{Y}) = m$$

esempi

i) Parabola $C: x^2 - yz = 0$



$$P = [0:0:1]$$

$$U = U_3 = P^\perp \setminus \{z=0\}$$

eq. affine $x^2 - y = 0$

$$C_P(C) = T_P(C) = r: y = 0$$

ii) Circonfenza: $C: x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$$P = [1:0:1] \quad U = U_3 = P^\perp \setminus \{z=0\}$$

Eq. affine ?? Changing coordinate

$$x' = x - z$$

$$y' = y \quad \rightarrow \quad C: (x' + z)^2 + y'^2 - z'^2 = 0$$

$$z' = z$$

$$P = [0:0:1]$$

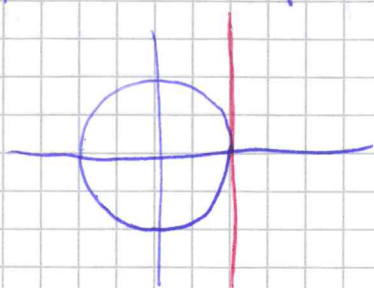
$$C: (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 + 2x'z' + (z')^2 = 0$$

eq. affine (poniamo $z=1$) $(x')^2 + (y')^2 + 2x' = 0$

parte omogenea di grado più basso: $2x' = 0$

$$T_P(C) = C_P(C) = r: x - 1 = 0 \quad \text{eq. affine}$$

$x - z = 0$ eq. proiettiva

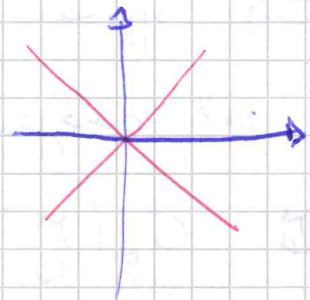


[Ex] Sia Q una quadrica in $\mathbb{P}_k^n$,

verificare che Q è non-singolare $\Leftrightarrow$ è non-deg.



Altri esempi: $C: x^2 - y^2 = 0$ in $\mathbb{P}_k^2$



$$P = [0:0:1] \quad U = U_3$$

$$\text{eq. affine: } x^2 - y^2 = 0 \quad x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$\Rightarrow \text{parte omogenea (di grado più basso): } x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow C_P(C) = \text{Supp}(C) = r_1 \cup r_2$$

Sia r una retta per P $r \neq r_1, r_2$

$$\Rightarrow r: y - \lambda x = 0 \quad \lambda \neq \pm 1 \quad \text{oppure } x = \mu y \quad \mu \neq \pm 1$$

$$r \cap \text{Supp}(C): x^2 - \lambda^2 x^2 = 0 \quad (1 - \lambda^2) x^2 = 0$$

$$\Rightarrow I(C, r, P) = 2$$

$$\Rightarrow m_P(C) = 2$$

$$\Rightarrow T_P C = P^2$$

In effetti: gradiente $(2x, 2y, 0) = (0, 0, 0)$ in P .

ipersuperficie cubica in $\mathbb{P}_n^3$: $\mathcal{Y}: x^3 + x^2z - y^2z = 0$

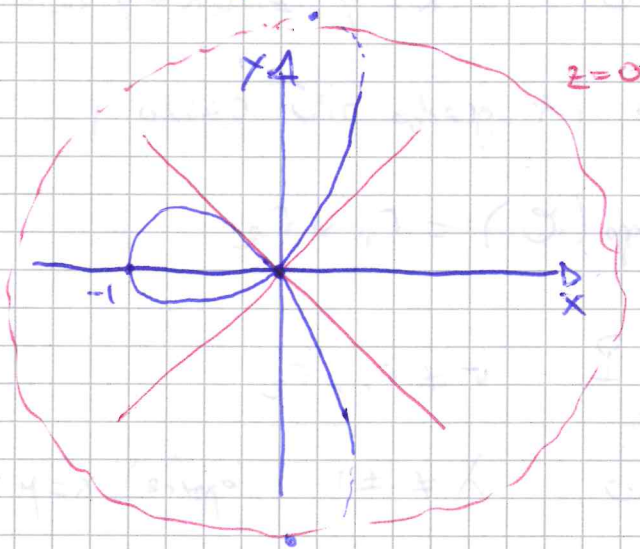
$$P = [0:0:1] \quad U = U_3$$

$$\text{Eq. affine in } P: x^3 + x^2 - y^2 = 0$$

pol. omogeneo di grado più basso: $x^2 - y^2$

$$\mathcal{C}_P(\mathcal{Y}) = r_1 \cup r_2 \quad r_1: x+y=0 \quad r_2: x-y=0$$

$$T_P(\mathcal{Y}) = P^2: \text{infatti } \nabla = (3x^2 + 2xz, -2yz, x^2 - y^2)$$



Ex per $\mathcal{Y}: x^3 + x^2z - y^2z = 0$ trovare

$$\mathcal{C}_Q(\mathcal{Y}) \text{ e } T_Q(\mathcal{Y}) \text{ in } Q = [0:1:0]$$

$$Q: \text{sig}^+ 2: x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$\text{eq. proiettiva} \quad x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$$

$$P = [1:0:0:1] \quad U = U_P = \{w \neq 0\}$$

$$\text{Eq. affine in } U_P: x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

$$\text{"centrato" in } P = (1, 0, 0): x' = x - 1 \quad y' = y \quad z' = z$$

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 + 2x' = 0$$

$$\text{parte omogenea} \quad 2x' = 0$$

$$\Rightarrow T_P(Q) = G_P(Q) \neq x' = 0 \quad x = 1$$

$$\text{eq. proiettiva} \quad T_P: x - w = 0$$

$$\text{in effetti: } \nabla = (2x, 2y, -2z, -2w)$$

$$T_P Q: 2x - 2w = 0$$

$$\text{Osserviamo che: } T_P Q \cap \text{Sup}(Q): \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Contiene 2 rette: } \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases}$$

Altro esempio: 2 ATTENZIONE se

(2/6)

il campo non è algebricamente chiuso,
possono succedere cose "strane"!

$$C: x^3 - 2x^2 - 2y^2 = 0 \quad \text{in } \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

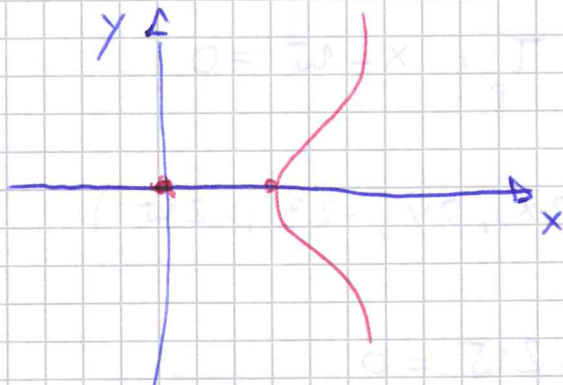
$$P = [0:0:1] \quad \text{spazio fond. } U_3 = \{z \neq 0\}$$

$$\text{in } \bar{U}_3 \text{ eq. } x^3 - x^2 - y^2 = 0$$

$$P \in \text{Supp}(C) \cap \bar{U}_3$$

ma se $|x| < \varepsilon$ non ci sono altri punti:

$$y^2 = x^3 - x^2 \Rightarrow y^2 = \underbrace{x^2}_{\neq 0} \underbrace{(x-1)}_{\neq 0} \quad \wedge \quad |x| < 1$$



$$T_P C = ? \quad \text{Sia } r = r_\lambda: y - \lambda x = 0$$

$$C_P(C) = ? \quad r_\lambda \cap C: x^3 - x^2 - \lambda^2 x^2 = 0$$
$$x^2(x - (1 + \lambda^2)) = 0$$

$$\Rightarrow I(C, r_\lambda, P) = 2$$

$$r: x = 0 \quad r \cap C: y^2 = 0 \Rightarrow I(C, r, P) = 2$$

$$\Rightarrow w_P(C) = 2 \quad \text{e } T_P C = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \quad C_P(C) = ??$$

l'equazione affine è

$$\underbrace{x^3}_{G_3} - \underbrace{x^2 - y^2}_{G_2} = 0$$

$\Rightarrow$ componente omogenea di grado minimo
è $G_2 = -x^2 - y^2$ in $\mathbb{R}$ non è il
prodotto di termini lineari.

$$\Rightarrow C_p(\mathcal{C}) : -x^2 - y^2 = 0$$

$\Rightarrow C_p(\mathcal{C}) = \{(0,0)\}$ è solo un punto.

Se passiamo su $\mathbb{C}$,

$$C_p(\mathcal{C}) = r_1 \cup r_2 \text{ con}$$

$$r_1 : x - iy = 0 \quad \text{e} \quad r_2 : x + iy = 0$$

e in effetti $I(\mathcal{C}, r_i, \mathbb{P}) = ?$

$$r_1 : y = -ix \quad r_2 : y = ix$$

$$\mathcal{C} \cap r_{1,2} : x^3 - x^2 - (\mp ix)^2 = 0 \quad x^3 = 0 \quad \begin{matrix} 2 \\ // \end{matrix}$$

$$\Rightarrow I(\mathcal{C}, r_1, \mathbb{P}) = I(\mathcal{C}, r_2, \mathbb{P}) = 3 > m_{\mathbb{P}}(\mathcal{C})$$

Idea: meglio studiare le ipersuperfici in $\mathbb{P}_k^n$,
poi guardare i punti in $\mathbb{P}_k^n \subset \mathbb{P}_k^n$

Ex i) Determinare $T_p(C)$ e $C_p(C)$ per le coniche in forma standard.

E per le quadriche in P^3 .

ii) Abbiamo definito una retta r tangente all'ipersuperficie $\mathcal{V}$ in un punto P se $I(\mathcal{V}, r, P) \geq 2$ e $T_P \mathcal{V} = \bigcup (\text{rette tangenti in } P)$

Se $\mathcal{V}: F(x) = 0$ e $P = [p_0: p_1: \dots: p_n] \in \text{Supp}(\mathcal{V})$

Mostrare che $T_P \mathcal{V}: \frac{\partial F}{\partial x_0}(p_0, \dots, p_n) x_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(p_0, \dots, p_n) x_n = 0$

iii) Mostrare che $P \in \text{Supp}(\mathcal{V})$ verifica

$$P \in \text{Sing}(\mathcal{V}) \iff m_P(\mathcal{V}) \geq 2.$$