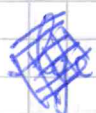


3 - Curve Algebriche - Coniche - Quadriche.

Def: i) Una curva ~~proiettiva~~  piano proiettiva $\mathcal{C}$ sul campo k è un'ipersuperficie in $\mathbb{P}_k^2$, cioè una classe di proporzionalità di un polinomio omogeneo $F(x_0, x_1, x_2) \in k[x_0, x_1, x_2]$ di grado positivo.

- Il supporto di una curva piano proiettiva $\mathcal{C}$ è l'insieme $\text{Supp}(\mathcal{C}) := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}_k^2 / F(x_0, x_1, x_2) = 0\} \subset \mathbb{P}^2$
- Il grado di una curva $\mathcal{C}$ è il grado del polinomio omogeneo F .

ii) Una curva piano affine $\mathcal{C}$ sul campo k è una classe di proporzionalità di un polinomio ~~omogeneo~~ $F \in k[x, y]$ di grado positivo.

- Il supporto di $\mathcal{C}$ è $\text{Supp}(\mathcal{C}) := \{(x, y) \in A_k^2 / F(x, y) = 0\} \subset A_k^2$
- Il grado di $\mathcal{C}$ è $\deg \mathcal{C} := \deg F$.

iii) Una curva piano euclidea è una classe di proporz. di un polinomio $F \in \mathbb{R}[x, y]$ di grado > 0 .

$\text{Supp}(\mathcal{C}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / F(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

$\deg(\mathcal{C}) = \deg F$.

- Nei casi sopra diciamo che le curve sono "curve algebriche" (per distinguerle dalle curve differenziabili) definite dall'equazione $F(x, y) = 0$ (o $F(x_0, x_1, x_2) = 0$).

Caso $d=1$: (i) iperpiani proiettivi $H \subset \mathbb{P}^2$,
cioè rette proiettive.

(ii) iperpiani affini $H \subset \mathbb{A}_k^2$ cioè rette affini

(iii) rette euclidee, cioè rette in $\mathbb{R}^2$, con
distanza indotta dalla distanza in $\mathbb{R}^2$.

Abbiamo visto come una proiettività $T: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$
agisce sulle rette:

$$\text{se } T([x_0: x_1: x_2]) = [\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2, \dots, \alpha_{20}x_0 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2]$$

e r ha equazione $F(x_0, x_1, x_2) = Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 = 0$

Allora $\text{Supp}(r) = \{[x_0: x_1: x_2] / Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 = 0\}$

e $T^{-1}(\text{Supp}(r)) = \{[x_0: x_1: x_2] / A(\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2) + B(\dots) + C(\dots) = 0\}$

definiamo $T^{-1}(r) = [A(\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2) + B(\dots) + C(\dots)]$

Analogamente definiamo

Se $T: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ proiettività, e

C è la curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$

Allora $T^{-1}(C)$ è la curva di equazione

$$F(\lambda_{00}x_0 + \lambda_{01}x_1 + \lambda_{02}x_2, \lambda_{10}x_0 + \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2, \lambda_{20}x_0 + \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2) = 0.$$

Chiaramente $\text{Supp}(T^{-1}(C)) = T^{-1}(\text{Supp}(C)) \in \mathbb{P}^2$.

E se $T: A_k^2 \rightarrow A_k^2$ affinità e $C: F(x, y) = 0$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c$

allora $T^{-1}(C)$ è definita da $F(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c) = 0$

Stessa cosa se $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un'isometria.

Def. Sia C una curva piana proiettiva (risp. affine, euclidea). Una curva D si dice proiettivamente equiv. (risp. affinemente equiv., congruente) se esiste una proiettività (risp. affinità, isometria) T , tale che $D = T^{-1}(C)$.

es. tutte le rette proiettive sono equivalenti.

• in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la curva di eq. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ non è equiv. a quella di eq. $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

Obiettivo: "Classificare le curve algebriche" cioè,

- i) trovare un rappresentante per ogni classe di equivalenza (affine, proiettiva, congruenza),
- ii) data una curva algebrica, trovare la proiettività (affinità, isometria) che la trasformi nel rappresentante per la sua classe di equiv.

In generale difficile

lo facciamo per $d = \deg(C) = 2$, $k = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$.

Una curva piana (proiett., affine, euclidea)

di grado 2 è detta una conica (proiett., aff., eucl.)

§3.1 Coniche proiettive

(158)

Da ora in poi supponiamo $\text{car}(k) \neq 2$.

Una conica proiettiva in $\mathbb{P}_k^2$ è un pol. omogeneo di grado 2, a meno di un coeff. di proporzionalità in k^* . Eq. della conica $F(x_0, x_1, x_2) = 0$

con $F \in k[x_0, x_1, x_2]_2 = \langle x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 \rangle$

Quindi l'insieme delle coniche proiettive è

$\mathbb{P}(k[x_0, x_1, x_2]_2)$, e ha dimensione 5.

Oss. poiché $\text{car}(k) \neq 2$, ogni polinomio omogeneo di grado 2 è la forma quadratica associata ad una forma bilineare in (x_0, x_1, x_2) :

$$F(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Poniamo $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Allora $F(x) = {}^t X A X$.

Def. Chiamiamo A la "matrice della conica $\mathcal{C}$ ",

$\text{rg}(A) =: \text{rg}(\mathcal{C})$. $\text{rg}(\mathcal{C}) = 3$ "e non degenera"

$\text{rg}(\mathcal{C}) = 2$ "e ^{semplicemente} degenera" $\text{rg}(\mathcal{C}) = 1$ "e doppiamente deg."

Se $T: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ proiettività con matrice $[P] \in \text{PGL}(\mathbb{P}_k^2)$

$$\text{e } F(x) = {}^t x A x$$

$$\text{Allora } F(Px) = {}^t x ({}^t P A P) x$$

$\Rightarrow$ Se la conica C ha matrice A ,
 $T^{-1}(C)$ ha matrice $({}^t P A P)$.

Poiché il polinomio che definisce una conica è definito a meno di un fattore di proporzionalità, possiamo dire:

Prop. Sia C la conica di eq. ${}^t x A x = 0$
 D ${}^t x B x = 0$

Allora C e D sono proiettivamente equivalenti

$$\Leftrightarrow \exists P \in \text{GL}_3(k), \alpha \in k^\times, \text{ t.c. } \alpha B = {}^t P A P.$$

Def. Un invariante proiettivo di una conica è una proprietà che non cambia per coniche proiettivamente equivalenti.

(15.) Se C è una conica proiettiva
 $sg(C)$ è un invariante proiettivo.

es. Se $C \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ è una conica proiett. reale
con matrice A , allora $\text{sgn}(A) = (p, q)$ non è
un invariante proiettivo
infatti anche $-A$ è matrice della stessa conica C ,
e $\text{sgn}(-A) = (q, p)$.

Perciò se C ha matrice A con $\text{sgn}(A) = (p, q)$
allora $(\max\{p, q\}, \min\{p, q\})$ è un invariante pr.:
infatti $\text{sgn}(PAP) = \text{sgn}(A)$ per $P \in GL_3(\mathbb{R})$
e $\text{sgn}(\alpha A) = \text{sgn}(A) = (p, q)$ se $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$
e $\text{sgn}(\alpha A) = (q, p)$ se $\alpha \in \mathbb{R}^{<0}$.

Teor. Sia $k = \overline{k}$ un campo algebricamente chiuso,
allora ci sono 3 classi di equiv. proiettive di coniche in $\mathbb{P}_k^2$,
con rappresentanti le 3 forme canoniche:

$D_3: x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ Conica generale: $\text{supp}(D_3)$ non contiene rette

$D_2: x_0^2 + x_1^2 = 0$ Conica semplicemente degenera:
 $\text{supp}(D_2) = \{x_0 - ix_1 = 0\} \cup \{x_0 + ix_1 = 0\}$
Unione di due rette distinte.

$D_1: x_0^2 = 0$ Conica doppiamente degenera:
 $\text{supp}(D_1) = H_0$ una retta (iperpiano in $\mathbb{P}_k^2$)

Teor. Ci sono 5 classi di equiv. proiettiva di coniche reali, con le 5 forme canoniche

	$\text{rg}(D_i)$	$\text{sgn} = p, q$ $p \geq q$	$\text{supp}(D_i)$
$D_1: x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	3	(3, 0)	$\emptyset$
$D_2: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	3	(2, 1)	$\neq \emptyset$ e non contiene rette $\text{supp}(D_2) \subset \mathbb{P}^2 \setminus H_2$
$D_3: x_0^2 + x_1^2 = 0$	2	(2, 0)	$\text{supp}(D_3) = \{[0:0:1]\}$
$D_4: x_0^2 - x_1^2 = 0$	2	(1, 1)	$\text{supp}(D_4) = r_1 \cup r_2$ unione di 2 rette $x_0 = x_1$ e $x_0 = -x_1$
$D_5: x_0^2 = 0$	1	(1, 0)	$\text{supp}(D_5) = r$ retta $x_0 = 0$

Dim. Se C è una conica reale, l'equazione è data da una forma quadratica ${}^t x A x = 0$

Diagonalizziamo la forma quadratica e normalizziamo:

$${}^t P A P = \text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, 0, \dots, 0) \quad \text{con } p+q=r$$

prendiamo $-{}^t P A P$ se $p < q$.

$\rightarrow$ se $P \in GL_3(\mathbb{R})$ induce $T: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$

Allora $T(C)$ ha la stessa equazione di una delle D_i .

Chiaramente per $i \neq j$ D_i e D_j non sono proiettivamente equivalenti, perché non possono esserlo i loro supporti.

Osservazioni: • Se k è un campo qualsiasi ($\text{car}(k) \neq 2$)
una conica $\mathcal{C}$ è equivalente ad una conica di equazione
$$x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = 0$$

• Possiamo esprimere l'osservazione sopra (e i teoremi)
esiste un riferimento proiettivo R' di $\mathbb{P}_k^2$ t.c. nelle
coordinate $x' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ di R' la conica $\mathcal{C}$ ha equazione
$$(x'_0)^2 + \alpha_1 (x'_1)^2 + \alpha_2 (x'_2)^2 = 0$$

EX In $\mathbb{P}_k^2$ con rif. proiett. qualsiasi R considerare la
conica $\mathcal{C}$ di equazione: $2x_0x_1 - 2x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0$.

(i) per $k = \mathbb{C}$ e per $k = \mathbb{R}$ classificare la conica $\mathcal{C}$
indicandone una forma canonica. $\mathcal{D}$

(ii) Determinare un rif. proiettivo R' t.c. nelle
coordinate di R' $\mathcal{C}$ abbia equazioni della f. canonica.

(iii) Determinare una proiettività $T: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$
t.c. $T^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

(163)

Svolgimento. (i) $\mathcal{C}$ ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A$

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$$

• Se $k = \mathbb{C}$ $\mathcal{D}: x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ è proiett. equiv. $\rightarrow \mathcal{C}$.

• Se $k = \mathbb{R}$ $\mathcal{C}$ ha f. canonici $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ oppure

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0. \text{ Nel primo caso } \operatorname{Supp}(\mathcal{C}) = \emptyset,$$

nel secondo caso $\operatorname{Supp}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

ma il punto $[1:0:0] \in \operatorname{Supp}(\mathcal{C}) \Rightarrow$

$$\mathcal{C} \text{ è equiv. } \rightarrow \mathcal{D}: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

(ii) troviamo una matrice congruente ad A con Lagrange:

$E = (e_0, e_1, e_2)$ base canonica di $\mathbb{C}^3$ (o $\mathbb{R}^3$)

$$f_0 = e_0 + e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}^t f_0 A f_0 = 2 = p(f_0, f_0)$$

$$p\left(\frac{1}{\sqrt{2}} f_0, \frac{1}{\sqrt{2}} f_0\right) = 1 \quad p\left(\frac{1}{\sqrt{2}} f_0, e_2\right) = 0$$

$$e'_1 = e_1 - \frac{p(f_0, e_1)}{p(f_0, f_0)} f_0 = e_1 - \frac{1}{2} (e_0 + e_1) = -\frac{1}{2} e_0 + \frac{1}{2} e_1$$

$$e'_2 = e_2 - \frac{p(f_0, e_2)}{p(f_0, f_0)} f_0 = e_2 - \frac{0}{2} (e_0 + e_1) = e_2$$

$$p(e'_1, f_0) = -\frac{1}{2} p(e_0 - e_1, e_0 + e_1) = 0$$

$$p(e'_1, e'_1) = p\left(-\frac{1}{2} e_0 + \frac{1}{2} e_1, -\frac{1}{2} e_0 + \frac{1}{2} e_1\right) = -\frac{2}{4} p(e_0, e_1) = -\frac{1}{2}$$

$$p(e'_1, e'_2) = p\left(-\frac{1}{2} e_0 + \frac{1}{2} e_1, -\frac{1}{2} e_0 + \frac{1}{2} e_1 + e_2\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$e_2'' = e_2' - \frac{\beta(e_2', e_1')}{\beta(e_1', e_1')} e_1' = e_2' - \frac{3/2}{-1/2} e_1' = e_2' + 3e_1' =$$

$$= -\frac{1}{2} e_0 - \frac{1}{2} e_1 + e_2 - \frac{3}{2} e_0 + \frac{3}{2} e_1 = -2e_0 + e_1 + e_2$$

$$\beta(e_2'', f_0) = (-2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\beta(e_2'', e_1') = (-2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 4) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\beta(e_2'', e_2'') = (-2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 4) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

OK $f_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^t P A P = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1/2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

• $k = \mathbb{C} \quad f_0' = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f_1' = -\sqrt{2} i f_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} i / 2 \\ -\sqrt{2} i / 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2' = \frac{1}{2} f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & +i/\sqrt{2} & -1 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$F = FQ = (f_0' \ f_1' \ f_2') \quad R' = \mathcal{R}P(F)$$

in $R' \subset \mathbb{C}$ la equazione $(x_0')^2 + (x_1')^2 + (x_2')^2 = 0$.

• $k = \mathbb{R}$ segustura $(2, 1)$:

prendiamo $f_0'' = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f_1'' = \frac{1}{\sqrt{4}} f_2 = \frac{1}{2} f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$f_2'' = \sqrt{2} f_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

MA $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$F' = ES$ e in $\mathbb{R}'' = \mathbb{RP}(F')$ $\mathcal{C}$ ha equaz.

$$(x_0'')^2 + (x_1'')^2 - (x_2'')^2 = 0.$$

(iii). Sia $T: \mathbb{P}_\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ la proiezione con matrice Q , allora $T^{-1}(\mathcal{C})$ ha eq. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

• Sia $G: \mathbb{P}_\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_\mathbb{R}^2$ la proiezione con matrice S , allora $G^{-1}(\mathcal{C})$ ha equazione

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

//

§ 3.2 Coniche Affini

(166)

Def: Una conica affine è un polinomio $F(x,y) \in k[x,y]$ di secondo grado, a meno di coeff. di proporzionalità

in k^* . Il supporto di una conica $C: F(x,y)=0$

in A_k^2 con rif. affine $RA(0,E)$ canonico è

l'insieme $\text{Supp}(C) = \{P=(x,y) \in A_k^2 / F(x,y)=0\}$

Equazione della conica affine $C: F(x,y)=0$.

⚠ ATTENZIONE: contrariamente ai polinomi omogenei, i polinomi di secondo grado NON formano uno sp. vett.!!

Siano sempre in $\text{car}(k) \neq 2$, possiamo scrivere:

$$F(x,y) = \underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{parte quadratica}} + \underbrace{2a_{01}x + 2a_{02}y}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{a_{00}}_{\text{term. noto}}$$

$$\text{se } \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & \underline{a} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix}$$

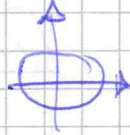
$$\text{con } A \in M_{3 \times 3}(k) \quad \text{Allora } F(x,y) = {}^t \tilde{x} A \tilde{x} =$$

$$= a_{00} + {}^t \underline{a} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x \ y) \underline{a} + (x \ y) A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{a_{00}}_{\substack{\text{cost.} \\ \text{term. noto}}} + \underbrace{2({}^t \underline{a}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\substack{\text{lineare} \\ \text{in } x,y}} + \underbrace{(x \ y) A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\substack{\text{quadratics} \\ \text{in } x,y}}$$

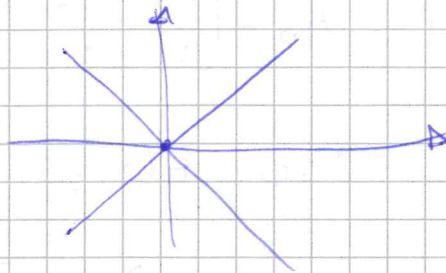
Def. Sia C la conica di equaz. ${}^t\tilde{x}A\tilde{x}=0$

- il rango di C è $\text{rg}(C) = \text{rg}(A)$
- $\text{rg}(C) = 3$ " C è non degenera"
- $\text{rg}(C) = 2$ " C è semplicemente degenera"
- $\text{rg}(C) = 1$ " C è doppiamente degenera"
- $\text{rg}(A_0) = 2$ " C è una conica a centro"
- $\text{rg}(A_0) = 1$ " C è una parabola"

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(A) = 3$ $\text{rg}(A_0) = 2$ $x^2 + y^2 - 1 = 0$
conica a centro non degenera 

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(A) = 3$ $\text{rg}(A_0) = 1$ $x^2 - 2y = 0$
parabola non degenera 

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(A) = 2$ $\text{rg}(A_0) = 2$ $x^2 - y^2 = 0$
conica a centro sempl. degenera



• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(A) = 2$ $\text{rg}(A_0) = 1$ $x^2 - 1 = 0$
parabola sempl. degenera



Osservazione: Se $\mathcal{C} = [F]$ è una conica affine in A_k^2 e $F(x, y) = {}^t \tilde{x} A \tilde{x}$. Possiamo considerare la conica proiettiva $\bar{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}_k^2$ con matrice A :
 è la conica di equazione $\bar{F} = \bar{F}(x_0, x_1, x_2) = {}^t Z A Z = 0$ con $Z = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Def: $\bar{\mathcal{C}} = [\bar{F}]$ è la "0-esima proiettificazione di $\mathcal{C}$ "

Se $\text{Supp}(\mathcal{C}) \subseteq A_k^2$ e $\text{Supp}(\bar{\mathcal{C}}) \subseteq \mathbb{P}_k^2$ allora

$$j_0(\text{Supp}(\mathcal{C})) = \text{Supp}(\bar{\mathcal{C}}) \cap (\mathbb{P}^2 \setminus H_0)$$

e chiamiamo $\text{Supp}(\bar{\mathcal{C}}) \cap H_0$ "punti impropri di $\mathcal{C}$ ".

Mostriamo che $j_0(\text{Supp}(\mathcal{C})) = \text{Supp}(\bar{\mathcal{C}}) \cap (\mathbb{P}^2 \setminus H_0)$.

(1) ovvio: $(x, y) \in \text{Supp}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1 \ x \ y) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow [1 \ x \ y] = j_0(x, y) \in \text{Supp} \bar{\mathcal{C}}$$

(2) sia $[x_0, x_1, x_2] \in \text{Supp}(\bar{\mathcal{C}}) \cap (\mathbb{P}^2 \setminus H_0)$

$$\Rightarrow x_0 \neq 0 \quad [1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}] \in \text{Supp}(\bar{\mathcal{C}})$$

$$\Rightarrow (1 \ \frac{x_1}{x_0} \ \frac{x_2}{x_0}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1/x_0 \\ x_2/x_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0 \Rightarrow [x_0, x_1, x_2] = j_0\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) //$$

I punti impropri di C (o di $\text{Supp}(C)$) sono al più 2:

$$H_0 \cap \text{Supp}(\bar{C}) = \left\{ [0: x_1: x_2] \in H_0 \mid (0: x_1: x_2) A \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ = \left\{ [0: x_1: x_2] \mid (x_1: x_2) A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Ma $Q(x_1, x_2) = (x_1: x_2) A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ è un pol. omogeneo di grado 2 in 2 variabili.

$\Rightarrow$ ha al più 2 soluzioni omogenee:

in generale se $F(x, y)$ è omogeneo in $K[x, y]$ allora F ha al più d soluzioni omogenee:

in $\bar{K}$ F si fattorizza come $(\boxed{E} x)$ (lineare).

$$F(x, y) = (\beta_1 x - \alpha_1 y)(\beta_2 x - \alpha_2 y) \dots (\beta_d x - \alpha_d y)$$

ha d soluzioni omogenee: $[x_1: p_1], \dots, [\alpha_d: p_d]$.

es. in A_R^2 consideriamo $C_1: x^2 + y^2 - 1 = 0$ $\bar{C}_1: x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$$C_2: x^2 - y = 0 \quad \bar{C}_2: x^2 - yz = 0$$

$$C_3: xy - 1 = 0 \quad \bar{C}_3: xy - z^2 = 0$$

$$\text{Supp}(\bar{C}_1) \cap H_0 = \emptyset \quad \text{Supp}(\bar{C}_2) \cap H_0 = \begin{bmatrix} z & x & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Supp}(\bar{C}_3) \cap H_0 = \left\{ \begin{bmatrix} z & x & y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z & x & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (H_0: z=0)$$

Chiaro che le operazioni descritte sono
inverse una dell'altra, otteniamo una biiezione:

$$\left\{ \text{coniche affini} \right\} \longrightarrow \left\{ \text{coniche proiettive } \mathcal{C} \right. \\ \left. \text{in } \mathbb{P}_k^2 \text{ t.c. } \text{supp}(\mathcal{C}) \not\subset H_0 \right\}$$

$$(\mathcal{C}: t\tilde{x}A\tilde{x}=0) \longmapsto \bar{\mathcal{C}}: t_zAz=0$$

$$\text{dove } \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } z = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot A_0 \neq 0 \Leftrightarrow F(x,y) \text{ ha deg } 2 \\ \Leftrightarrow \text{Supp}(\bar{\mathcal{C}}) \not\subset H_0$$

La biiezione inversa consiste nel prendere la conica
di equazione $F(1,x,y)=0$ e si chiama
affinizzazione (rispetto a j_0) della conica $\mathcal{C}: F(x_0,x_1,x_2)=0$

Come per le coniche proiettive, osserviamo come
le affinità trasformano le coniche affini:

se A^2 ha riferimento affine $RA(0,E)$,

le affinità di A^2 sono date da $M \in GL_2(k), c \in k^2$

$$f = f_{M,c}: A^2 \longrightarrow A^2 \\ Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{RA} \longmapsto f(Q) = \left(M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right)_{RA}$$

$$\text{osserviamo che } f_{N,d} \circ f_{M,c} = f_{NM, Nc+d}$$

(prodotto semidiretto, azione di $GL_2(k)$ su k^2)

Abbiamo anche ~~il~~ visto come scrivere le affinità

tramite $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & & \\ c_2 & & M \end{pmatrix} \quad \tilde{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

(prodotto semidiretto: $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_{11} & w_{12} \\ 0 & w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$)

Corrisponde a $\frac{1}{f_{M,c}} = \frac{1}{f_{I_2,c}} \circ \frac{1}{f_{M,0}}$

$\text{Aff}(A_k^2) = (k^2) \rtimes GL_2(k)$ con $GL_2(k) \hookrightarrow (k^2)$

(ex) verificare che $\text{Trans}(A_k^2) \subset \text{Aff}(A_k^2)$ sottogruppo norm. $\tilde{M} \mapsto M \in \text{Aut}(k^2)$

Dato un'affinità $f: A_k^2 \rightarrow A_k^2$ vogliamo descrivere come trasforma le curve.

Se $\mathcal{C}: F(x,y)=0$ e $f = \frac{1}{f_{M,c}}$

Allora $f^{-1}(\mathcal{C}): F(M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c) = 0$

Chiarmente $\text{Supp}(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{C}))$.

interpretiamo il polinomio $F(x,y) \in k[x,y]$ come

$F: A_k^2 \rightarrow k$, allora $\text{Supp}(\mathcal{C}) = F^{-1}(0)$
 $(x,y) \mapsto F(x,y)$

e $\text{Supp}(f^{-1}(\mathcal{C})) = (F \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(F^{-1}(0))$
 $= f^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{C}))$

It, abbiamo anche $F(x, y) = {}^t \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

e $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}\right) = \tilde{M}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}\right)$. Mettiamole tutte insieme

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) : F\left(\tilde{M}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) &= {}^t \left(\tilde{M}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) A \left(\tilde{M}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = \\ &= {}^t \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} ({}^t \tilde{M} A \tilde{M}) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a $f^{-1}(0)$ è ${}^t \tilde{M} A \tilde{M}$ //

Def. 1) Due coniche si dicono affine equivalenti se esiste un'affinità $f: A_k^2 \rightarrow A_k^2$ che trasformi una nell'altra.

ii) Una proprietà che dipende solo dalla classe di equivalenza affine di una conica è detta un'invariante affine della conica.

Prop. Siano C e D due coniche di equazioni

$$\text{risp. } C: {}^t \tilde{x} A \tilde{x} = 0 \quad \text{e} \quad D: {}^t \tilde{x} B \tilde{x} = 0$$

Allora C e D sono aff. equiv. se e solo se

$$\begin{aligned} \exists f = f_{M, c} \in \text{Aff}(A_k^2) \text{ e } \exists \alpha \in k^\times \text{ t.c. } \alpha B &= {}^t \tilde{M} A \tilde{M} \\ \text{con } \tilde{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & M \end{pmatrix} // \end{aligned}$$

- $\text{rg}(C) = \text{rg}(A)$ è un invariante affine
- $\text{rg}(A_0)$ è un invariante affine.
- In particolare "essere una conica a centro" è un invariante affine

(matrice di $f'(C) = \left(\frac{f}{x, y} \right)'(C)$ è ${}^t \tilde{M} A \tilde{M}$ che al "posto A_0 " ha la matrice ${}^t M A_0 M \in M_{2 \times 2}(k)$)

Richiami di Geo Affine:

per descrivere un'affinità $\leftrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \text{RA}(O', E') \\ f(O') = C' \in A \\ \psi(E') = EM' \quad M' \in GL_n(k) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(Q) &= f(O' + \overrightarrow{O'Q}) = C' + \psi(\overrightarrow{O'Q}) = \\ &= C' + M'(\overrightarrow{O'Q})_E \end{aligned}$$

Per omotetia di centro P_0 e dilatazione $\lambda \in k^*$:

$$f(Q) = f(P_0 + \overrightarrow{P_0Q}) = P_0 + \lambda(\overrightarrow{P_0Q})$$

$$\text{Se } P_0, Q \in A_k^n \quad P_0 = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

$$f(Q) = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = (1-\lambda) \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Quindi un'omotetia di centro $P_0 = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ e coeff. λ

ha matrice $M = \lambda I_n$ e trasl. $(1-\lambda) \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = c \quad f = f_{M,c}$

Def: Una simmetria rispetto ad un punto P_0 è

$w_{P_0, -1}$: un'omotetia di centro P_0 e di dilatazione -1

ii) Una conica è simmetrica rispetto ad un punto $P_0 \in A_k^2$

se $(w_{P_0, -1})^{-1}(C) = C$. P_0 è detto centro di simmetria della conica C .

Prop: Sia $\mathcal{C}$ una conica affine. Allora:

$\mathcal{C}$ è una conica a centro $\Leftrightarrow \mathcal{C}$ ha un unico centro di simmetria.

In questo caso il centro di simmetria è

$$C_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ t.c. } A_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \underline{a} = 0.$$

Dim: Abbiamo visto che se $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ l'affinità

$$w = w_{P_0, -1} \text{ è dato da } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

quindi ha matrice $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_0 & -1 & 0 \\ 2y_0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_3(k)$

$$P_0 = \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

se $\mathcal{C}$ ha matrice $A = \begin{pmatrix} a_{00} & \underline{a} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(k)$

allora ${}^t \tilde{M} A \tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} a_{00} + 4\underline{a}^t \underline{x}_0 + 4\underline{a}^t \underline{x}_0 A_0 \underline{x}_0 & -\underline{a} - 2\underline{a}^t \underline{x}_0 A_0 \\ \hline -\underline{a} - 2A_0 \underline{x}_0 & A_0 \end{array} \right)$

$\mathcal{C}$ ha un unico c. di sim. $P_0 \Leftrightarrow \exists P_0 \in A_k^2 / (w_{P_0, -1})^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$

$$\Leftrightarrow \exists! \underline{x}_0 \in M_{2 \times 1}(k) / {}^t \tilde{M} A \tilde{M} = \alpha A \text{ per qualche } \alpha \in k^*$$

$$\Leftrightarrow \exists \underline{x}_0 / \begin{cases} a_{00} = a_{00} + 4\underline{a}^t \underline{x}_0 + 4\underline{a}^t \underline{x}_0 A_0 \underline{x}_0 \\ -\underline{a} - 2A_0 \underline{x}_0 = \underline{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \underline{x}_0 / A_0 \underline{x}_0 + \underline{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(A_0) = 2. \text{ (def. di "conica a centro").}$$

Coroll. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due coniche a centro

aff. equivalenti, con P_0 centro di $\mathcal{C}$ e Q_0 centro di $\mathcal{D}$.

Allora se $f: A_k^2 \rightarrow A_k^2$ è un'affinità tc.

$\mathcal{D} = f^{-1}(\mathcal{C})$, si ha $f(Q_0) = P_0$,
cioè un'affinità conserva i centri.

Dim: scrivere le equazioni:

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ tc. } A_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \underline{a} = 0$$

$$e: {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & t_{\underline{a}} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix}$$

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \tilde{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \underline{c} & M \end{array} \right) \text{ con } M \in GL_2(k)$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} \text{ ha matrice } {}^t \tilde{M} A \tilde{M} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t_{\underline{c}} \\ 0 & t_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & t_{\underline{a}} \\ \underline{a} & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{c} & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_{\underline{c}} \\ 0 & t_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} + t_{\underline{a}} \underline{c} & t_{\underline{a}} M \\ \underline{a} + A_0 \underline{c} & A_0 M \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} a_{00} + t_{\underline{a}} \underline{c} + t_{\underline{c}} \underline{a} + t_{\underline{c}} A_0 \underline{c} & t_{\underline{a}} M + t_{\underline{c}} A_0 M \\ \hline t_M \underline{a} + t_M A_0 \underline{c} & t_M A_0 M \end{array} \right)$$

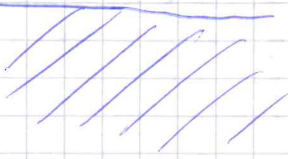
Vediamo che $f^{-1}(P_0)$ è il centro per $\mathcal{D}$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad f^{-1}(P_0) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \tilde{M}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \tilde{M}^{-1}(\underline{c})$$

$$\begin{aligned} (t_M A_0 M) (\tilde{M}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \tilde{M}^{-1} \underline{c}) &= t_M A_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (-t_M A_0 \underline{c}) = \\ &= -t_M \underline{a} - t_M A_0 \underline{c} \quad \text{OK} \quad \square \end{aligned}$$

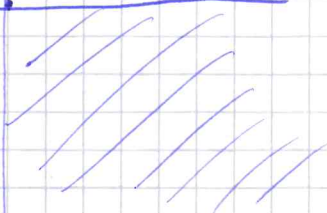
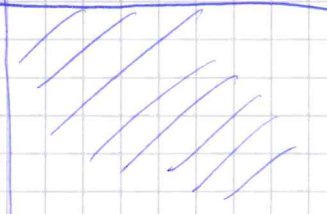
Classificazione le coniche affini:

(176)

$rg(e) \backslash rg_0(e)$	3	2	1
2	2 centri generale es. $x^2 + y^2 - 1 = 0$	2 centri sempl. deg. $x^2 + y^2 = 0$	
1	parabola generale es. $y^2 - x = 0$	parabola sempl. deg. $y^2 - 1 = 0$	$y^2 = 0$ parabola doppiamente deg.

Teor. 2(i) Sia $k = \bar{k}$ campo alg. chiuso. Ci sono 5 classi di equival. affine di coniche in A_k^2 . Con rappresentati:
Come Lp. 2.

(ii) Se $k = \mathbb{R}$ ci sono 9 classi di equivalenza:

$det(A_0) \backslash rg(e)$	3	2	1
$det(A_0) > 0$	ELLISSE GEN. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ELL.G. A P.T. IMM. $x^2 + y^2 + 1 = 0$	ELLISSE DEGENERE $x^2 + y^2 = 0$	
$det(A_0) < 0$	IPERBOLE GENERALE $x^2 - y^2 - 1 = 0$	IPERBOLE DEGENERE $x^2 - y^2 = 0$	
$det(A_0) = 0$	PARABOLA GENERALE $y^2 - x = 0$	PARAB. SEMP. DEGENERE $y^2 - 1 = 0$ PARAB. SEMP. DEG. A P.T. IMMAG. $y^2 + 1 = 0$	PARABOLA DOPPIAMENTE DEGENERE $y^2 = 0$

Dimostrare che i 2 casi insieme, per tutte:

- (I) Diagonalizziamo A_0 (Lagrange)
- (II) Eliminiamo la parte lineare e il termine noto
- (III) Normalizziamo.



(I) diagonalizzando la forma quadratica A_0

$$\leadsto {}^t M A_0 M = D \text{ diagonale } 2 \times 2$$

$$\leadsto \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \text{ t.c. } {}^t \tilde{M} A M \text{ non ha termine in } xy.$$

(II) Eliminiamo i termini lineari e costante:

Se $\mathcal{C}$ è conica e centro: $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & 0 \\ a_{02} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}, a_{11} a_{22} \neq 0$

Facciamo traslazione $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{01}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{02}/a_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$${}^t \tilde{M} A \tilde{M} = \begin{pmatrix} (a_{00} - \frac{a_{01}^2}{a_{11}} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}}) & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ diagonale}$$

(Inoltre $\det({}^t \tilde{M} A \tilde{M}) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$)

sono proprio =)

$$\mathcal{C} : a_{11} X^2 + a_{22} Y^2 + \left(a_{00} - \frac{a_{01}^2}{a_{11}} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}} \right) = 0.$$

$$\boxed{a_{11} X^2 + a_{22} Y^2 + d_{00} = 0}$$

⑥ Se $\mathcal{C}$ non è il centro:

$$A = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} \\ d_{01} & 0 & 0 \\ d_{02} & 0 & d_{22} \end{pmatrix}$$

178

possiamo supporre $d_{11} = 0$ e $d_{22} \neq 0$

operiamo con $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -d_{02}/d_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ traslazione

Otteniamo: ${}^t \tilde{M} A \tilde{M} = \begin{pmatrix} d_{00} - d_{02}^2/d_{22} & d_{01} & 0 \\ d_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f'(C) : d_{22} y^2 + 2d_{01} x + \left(d_{00} - \frac{(d_{02})^2}{d_{22}} \right) = 0$$

Scriviamo $f'(C)$ come $d_{22} y^2 + 2d_{01} x + d_{00} = 0$

• Se $d_{01} = 0$ $f'(C) \equiv \boxed{d_{22} y^2 + d_{00} = 0}$

• Se $d_{01} \neq 0$ trasliamo con $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d_{00}/2d_{01} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$x = x' - d_{00}/2d_{01} \quad y = y'$$

$$\leadsto d_{22} (y')^2 + 2d_{01} \left(x' - \frac{d_{00}}{2d_{01}} \right) + d_{00} =$$

$$\equiv \boxed{d_{22} (y')^2 + 2d_{01} x' = 0}$$

Paso III: normalizziamo, possiamo supporre

che $a_{00} = -1$ oppure $a_{00} = 0$.

② Conica a centro: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00}$

• $k = \mathbb{R}$ operiamo con $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{a_{22}} \end{pmatrix}$

otteniamo $x^2 + y^2 + a_{00} = 0$

• $k = \mathbb{R}$ operiamo con $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|a_{11}|} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{|a_{22}|} \end{pmatrix}$

otteniamo $\pm x^2 \pm y^2 + a_{00} = 0$

è (moltiplicando per (-1) se necessario) uno dei 5 casi per le coniche reali a centro.

③ Conica non a centro: $a_{22}y^2 + a_{00} = 0$

$$\leadsto y = \frac{y'}{\sqrt{|a_{22}|}} \leadsto (y')^2 + a_{00} = 0$$

$$a_{22}y^2 + 2a_{01}x = 0 \leadsto y = \frac{y'}{\sqrt{|a_{22}|}} \quad x = \frac{x'}{-2a_{01}}$$

$$\leadsto (y')^2 - x' = 0 \quad \text{nel caso } k = \mathbb{R}$$

e nel caso $\mathbb{R}$ prendiamo $\frac{1}{\sqrt{|a_{22}|}}$, otteniamo

tutte le equazioni che appaiono nella tabella.