

$$k = \mathbb{C}$$

2.12. Trasformazioni di Möbius (133)

Vogliamo descrivere il gruppo $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) = \text{PGL}(\mathbb{P}_\mathbb{C}^1)$

(Identifichiamo $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tramite j_0 :
prendendo $[1:z] = z \in \mathbb{C}$ e $[0:1] = \infty$)

consideriamo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ t.c. $ad - bc \neq 0$

$$\text{poniamo } f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$$

$$f(-d/c) = \infty \quad \text{e} \quad f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è un'applicazione biunivoca.

Una tale applicazione è detta "trasformazione lineare fra frazioni" o TLF o "trasformazione di Möbius".

[Ex] Se $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ e $g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ sono TLF

qualora ~~qualora~~ $g \circ f$ e mostrare che
è una TLF.

$\Rightarrow$ le TLF formano un gruppo.

Consideriamo $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{C})$

Allora questa definisce una proiettività,

$$f: \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

$$[x_0: x_1] \longmapsto [cx_1 + dx_0 : ax_1 + bx_0]$$

identificando $[x_0: x_1] \mapsto \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

otteniamo una TLF $\hat{f}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow$ un isomorfismo di gruppi $PGL_2(\mathbb{C}) \cong TLF$

Se $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è t.c. $\hat{f}(z) = z$ allora

z si dice un punto fisso della TLF $\hat{f}$.

[Ex] i) Se una TLF $\hat{f}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è $\hat{f} \neq id$, mostrare che ha almeno 1 pto fisso.

ii) mostrare che $\hat{f}$ ha al più 2 punti fissi (se $\hat{f} \neq id$)

iii) Dare un esempio di TLF con un solo pto fisso e uno con 2 pti fissi.

Abbiamo visto che possiamo identificare $PGL_2(\mathbb{C})$ con TLF tramite

$$\begin{aligned} \text{" } \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \text{" } : [x_0 : x_1] &\mapsto [dx_0 + cx_1 : bx_0 + ax_1] \\ \text{" } [1 : \frac{x_1}{x_0}] &\mapsto [1 : \frac{ax_1 + bx_0}{cx_1 + dx_0}] = \\ (ad - bc \neq 0) &= [1 : \frac{a \frac{x_1}{x_0} + b}{c \frac{x_1}{x_0} + d}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Studiamo quindi alcune proprietà di TLF

(o di $PGL_2(\mathbb{C})$) tramite questa ident. f.

Su $\mathbb{C}$: possiamo supporre che $ad - bc = 1$

Osserviamo che ∞ è un punto fisso $\Leftrightarrow$

$$f(\infty) = \frac{a}{c} = \infty \Leftrightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad (\text{possiamo porre } d=1)$$

Consideriamo $f(z) = az + b$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ (136)

è l'affineazione del $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} : [x_0 : x_1] \mapsto [x_0 : bx_0 + ax_1]$

è un'affinità di $\mathbb{C} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$

Quindi abbiamo $\text{Aff}_1(\mathbb{C}) \subset \text{PGL}_2(\mathbb{C})$

Se identifichiamo $\mathbb{C} = \{x+iy / x, y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2$

(come sp. vet. su $\mathbb{R}$) allora $\text{Aff}_1(\mathbb{C}) \subseteq \text{Aff}_2(\mathbb{R})$

queste sono affinità particolari: sono tutte e sole le similitudini di $\mathbb{R}^2$.

Infatti le affinità sono composizioni di una traslazione, che è un'isometria di $\mathbb{R}^2$,

e una mappa $z = x+iy \mapsto \alpha \cdot z = (pe^{i\vartheta}) \cdot z$

La mappa $z \mapsto \alpha z$ a sua volta è la

composizione di un'omotetia ($z \mapsto p \cdot z$) e

una rotazione $z = x+iy \mapsto e^{i\vartheta} \cdot z = (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) z =$

$$= (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(x+iy) = (\cos \vartheta x - \sin \vartheta y) + i(\sin \vartheta x + \cos \vartheta y)$$

$$(1 \ i) \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 \ i) R_{\vartheta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quindi $\text{Aff}_1(\mathbb{C})$ sono composizioni di:

- traslazioni
- omotetie
- isometrie dirette di $\mathbb{R}^2$ (cioè rotazioni)

Quindi sono similitudini (dirette) di $\mathbb{R}^2$.

$$\Rightarrow \text{Aff}_+(\mathbb{C}) = \text{Sim}^+(\mathbb{R}^2) .$$

In $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ possiamo considerare rette affini (rette):

$r \subset \mathbb{R}^2$ di equazione $Ax + By + C = 0$, $A, B, C \in \mathbb{R}$

e come sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$r = \{ z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R} / Ax + By + C = 0 \} =$$

$$= \left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{A}{2}(z + \bar{z}) + \frac{B}{2i}(z - \bar{z}) + C = 0 \right\}$$

e le circonferenze: $E(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0$

con $E \neq 0$, $A^2 + B^2 - 4EC > 0$, $E, A, B, C \in \mathbb{R}$

cioè $\mathcal{C} := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / E(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0 \} =$

$$= \{ x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R} / E(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0 \}$$

$$= \left\{ z \in \mathbb{C} / E z \bar{z} + \frac{A}{2}(z + \bar{z}) + \frac{B}{2i}(z - \bar{z}) + C = 0 \right\}$$

Chiaramente le similitudini dirette di $\mathbb{R}^2$, o le affinità di $\mathbb{C}$, trasformano rette in rette e circ. in circ.

Vediamo che lo stesso vale per le TLF:

(138)

Chiamiamo "cerchio di Möbius" un insieme

della forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / E(x^2+y^2) + Ax + By + C = 0\} =$

$$= \left\{ z \in \mathbb{C} / E z \bar{z} + \frac{A}{2}(z + \bar{z}) + \frac{B}{2i}(z - \bar{z}) + C = 0 \right\}$$

per $A, B, C, E \in \mathbb{R} / A^2 + B^2 - 4EC > 0$.

Allora $E=0 \rightarrow$ retta (reale) in $\mathbb{C}$ (piano di Gauss)

$E \neq 0 \rightarrow$ circonferenza in $\mathbb{C}$

$[E \neq 0]$ trovare centro e raggio. (centro $(-\frac{A}{2E}, -\frac{B}{2E})$)

Prop: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{TLF}$ trasforma

cerchi di Möbius in cerchi di Möbius.

Facciamo prima degli esempi:

Consideriamo $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $f(z) = \frac{1}{z}$

questa verifica $f(\infty) = 0$, $f(0) = \infty$, $f = f^{-1}$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$

vediamo come trasforma cerchi di Möbius in
cerchi di Möbius

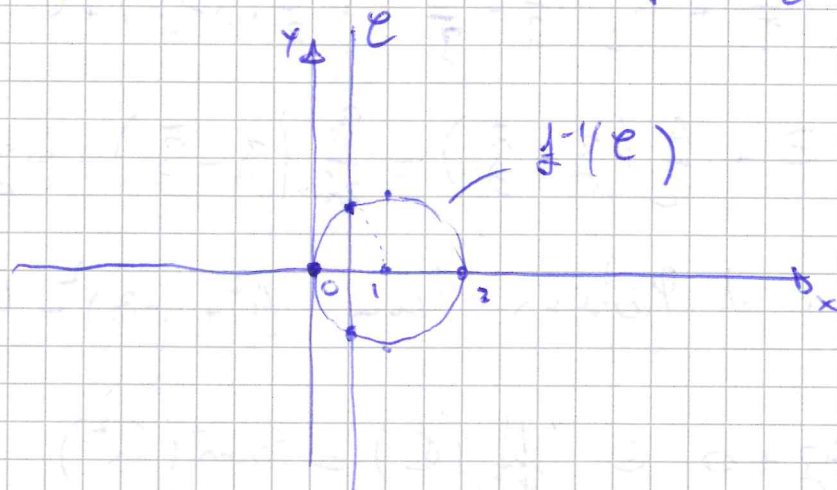
Prendiamo una retta: $x = \frac{1}{2}$ o $x - \frac{1}{2} = 0$

$$C: x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \rightarrow z + \bar{z} = 1 \quad C: z + \bar{z} - 1 = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \Rightarrow f^{-1}(C): \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(C): z + \bar{z} - z\bar{z} = 0 \quad \text{cioè} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$\Rightarrow f^{-1}(C)$ è una circonferenza.



Viceversa $D: x^2 + y^2 - 2x = 0$ $D: z\bar{z} - (z + \bar{z}) = 0$

$$f^{-1}(D): \frac{1}{z\bar{z}} - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 0$$

$$f^{-1}(D): z + \bar{z} - 1 = 0 \quad \text{retta.}$$

[Ex] trovare tutti i cerchi di Möbius C tali che

$$f^{-1}(C) = C.$$

(es.) retta $r: y = 0: z - \bar{z} = 0$ cioè $z = \bar{z}$ e $z \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(r) = r.$

Dim (Prop): Se $f = \frac{1}{z}$ allora f trasforma

cerchi di Möbius in cerchi di Möbius:

$$\mathcal{C}: E z \bar{z} + \frac{A}{2}(z + \bar{z}) + \frac{B}{2i}(z - \bar{z}) + C = 0$$

$$\text{con } A^2 + B^2 - 4EC > 0$$

$$\text{Allora } f^{-1}(\mathcal{C}) = \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} / f(z) \in \mathcal{C}\} =$$

$$= \{z / E \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\bar{z}} + \frac{A}{2}(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}) + \frac{B}{2i}(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}) + C = 0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} / E + \frac{A}{2}(z + \bar{z}) - \frac{B}{2i}(z - \bar{z}) + C z \bar{z} = 0\}$$

è ancora un C. di Möbius (con $A^2 + (-B)^2 - 4EC > 0$)

$$ii) \text{ Se } f(z) = az + b \in \text{Aff}_1(\mathbb{C}) = \text{Sim}^+(\mathbb{R}^2)$$

$\Rightarrow f$ trasforma rette in rette e circ. in circ.

$\Rightarrow f$ trasforma C. di Mö. in C. di Mö.

$$iii) \text{ Se } f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{TLF} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ ed } bc \neq 0$$

$$\text{possiamo scrivere } f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz+d)} \quad (\text{se } c \neq 0)$$

$$\text{allora } f \text{ è comp. di } z_1 = f_1(z) = cz + d \in \text{Aff}_1(\mathbb{C})$$

$$z_2 = f_2(z_1) = 1/z_1, \quad z_3 = f_3(z_2) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} z_2 \in \text{Aff}_1$$



ESERCIZI

(141)

1) Sia $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ la trasf. di Möbius "inversione".
Trovare tutti i cerchi di Möbius $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^1$ tali che
 $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Svolgimento: $\textcircled{I}$ sia $\mathcal{C}$ un cerchio di Möbius

con equazione $E(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0$

A, B, C, E reali con $A^2 + B^2 - 4EC > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Allora } f^{-1}(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C}) &= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid E \frac{1}{z\bar{z}} + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{B}{2i} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right) + C = 0 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid E + \frac{A}{2}(z + \bar{z}) + \frac{-B}{2i}(z - \bar{z}) + C z\bar{z} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Quindi $f^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ t.c.}$

$$(C, A, -B, E) = \lambda(E, A, B, C).$$

Consideriamo la proiezione $\mathbb{P}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{P}^3$

$$[E : A : B : C] \mapsto [C : A : -B : E]$$

Allora $\mathcal{C}$ è un cerchio di Möb. se $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$

$\iff$ i coeff. $[E, A, B, C]$ sono un punto fisso
di G .

Matrice di G :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(142)

I punti fissi di $G: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ sono gli autovettori dell'endo con matrice G .

$$P(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+1)^2$$

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$(1, 0, 0, 1)$ corrisponde all'eq. $(x^2 + y^2) + 1 = 0$

non è un C.d. di Hö.

$(0, 1, 0, 0)$ è la retta $x=0$, asse delle y .

Ogni C.d. di Hö di eq. $E(x^2 + y^2) + Ax + E = 0$

con $A^2 - 4E^2 > 0$ è stabile per $\frac{1}{f}$.

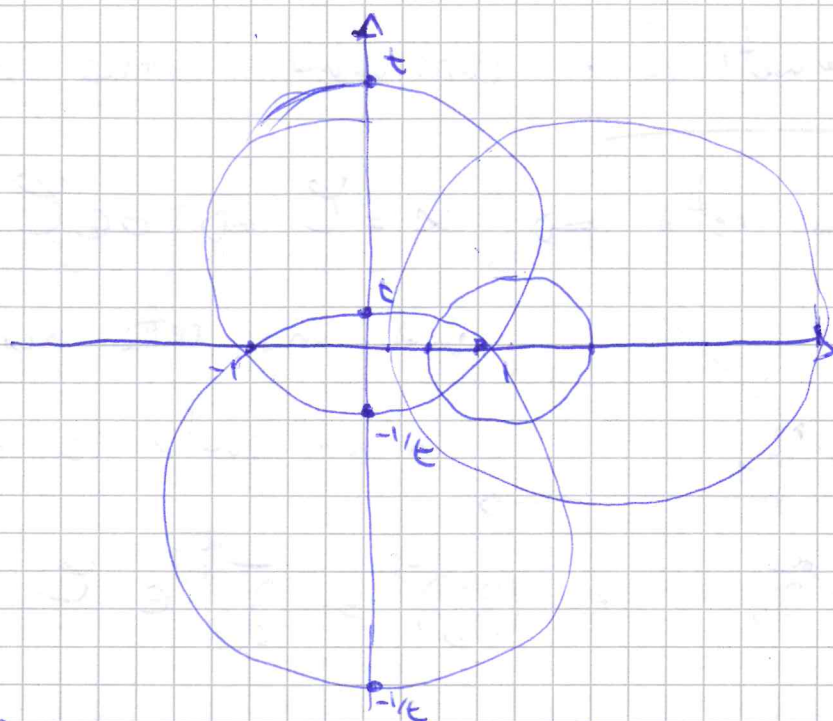
$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$(1, 0, 0, -1)$ corrisp. all'eq. $x^2 + y^2 - 1 = 0$, è C.d. di Hö

$(0, 0, 1, 0)$ ————— $y=0$ è retta,

Ogni C.d. di Hö di eq. $E(x^2 + y^2) + By - E = 0$

($B^2 + 4E^2 > 0$ sempre verificato) è stabile.



$$C: x^2 + y^2 + By - 1 = 0 \quad \text{cerchio per } (1,0), (-1,0)$$

$$x=0 \quad y^2 + By - 1 = 0 \quad y_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4}}{2} \quad (0, y_1) = (0, t)$$

$$(y_1)^{-1} = \frac{2}{-B + \sqrt{B^2 + 4}} = \frac{2(-B - \sqrt{B^2 + 4})}{-4} = -\frac{-B - \sqrt{B^2 + 4}}{2}$$

$$\Rightarrow (0, y_2) = (0, -\frac{1}{t})$$



$$C: x^2 + y^2 + Ax + 1 = 0 \quad x=0 \quad y^2 + 1 = 0 \quad \text{non incontri}$$

della dake y

è simmetrico risp. all'asse dake x,

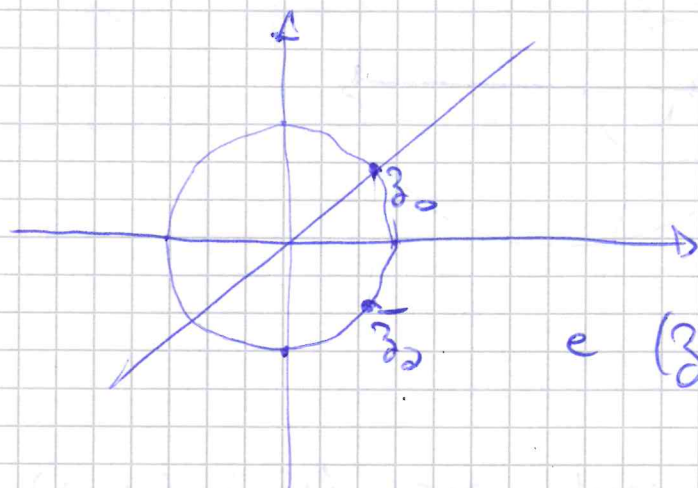
$$\text{e lo incontro in } x^2 + Ax + 1 \quad x_{1,2} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4}}{2}$$

$$(x_1)^{-1} = \frac{2}{-A + \sqrt{A^2 - 4}} = \frac{2(-A - \sqrt{A^2 - 4})}{4} = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4}}{2} = x_2$$

se $A < 0$ $0 < x_2 < 1$ e $x_1 > 1$ con $x_2 = (x_1)^{-1}$

Soluzione Geometrica: cerchiamo i cerchi stabili (14)

a) Se $\mathcal{C}$ è una retta $\Rightarrow \infty \in \mathcal{C} \Rightarrow 0 \in \mathcal{C}$



ma una retta incontra S'
in un punto (2 in realtà) z_0

$$\text{e } (z_0)^{-1} = \bar{z}_0 \in \mathcal{C}$$

$\Rightarrow$ quindi la retta è simmetrica rispetto
al coniugio (riflessione rispetto all'asse delle x)
 $\Rightarrow$ quindi $\mathcal{C}$ ha eq. $x=0$ oppure $y=0$.

b) Se $\mathcal{C}$ è una circonferenza:

non può essere interamente contenuta in un
semipiano $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z \geq 0\}$ o $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z \leq 0\}$
perché l'inversione cambia semipiano.

~~Quindi~~ Quindi $\mathcal{C}$ interseca l'asse delle x ,

abbiamo 2 casi: (b1) interseca l'asse delle y

(b2) Non interseca l'asse delle y .

(145)

b1 Se interseca l'asse delle y in un punto z_0
allora $z_0 = it$ e $(z_0)' = \frac{-i}{t}$ con $t \in \mathbb{R}^*$.

Ma incontra anche l'asse delle x in 2 punti

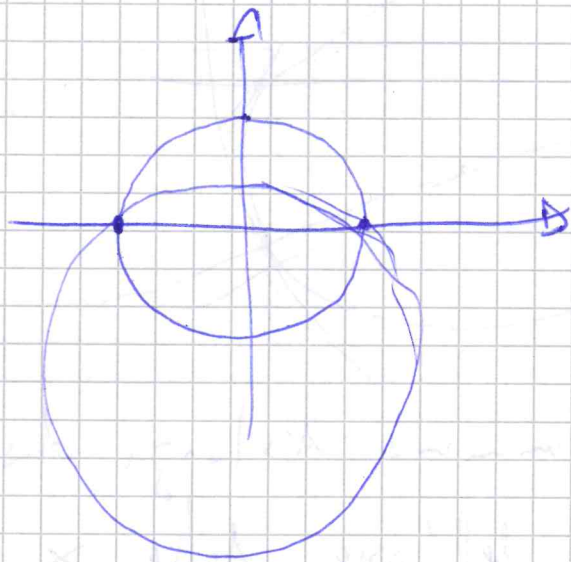
$(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ con $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$.

Ma allora $(x_1)' > 0$ e $(x_2)' < 0$.

Quindi $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$.

Quindi la circonferenza passa per i 4 punti:

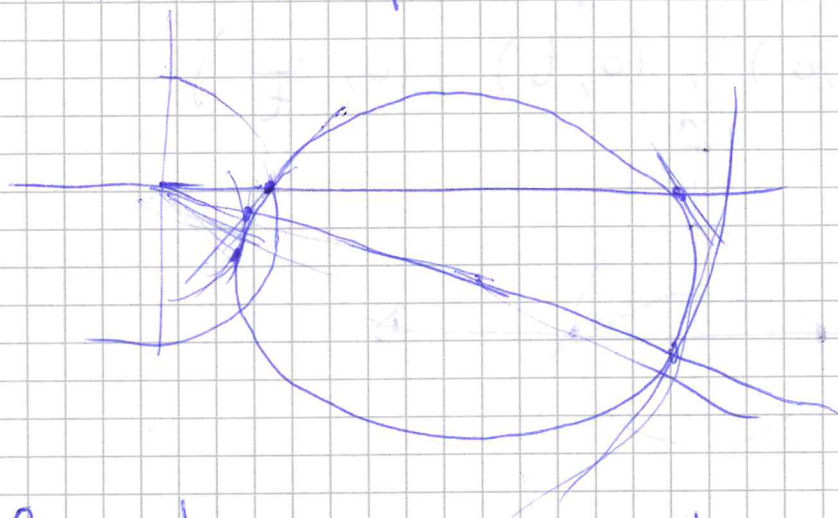
$(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, t)$, $(0, \frac{1}{t})$.



In particolare la circonferenza è
simmetrica rispetto all'asse delle y , ha
il centro in $(t - \frac{t + 1/t}{2})i$

(b2) Se non interseca l'asse delle y , allora interseca l'asse delle x in 2 punti, o entrambi positivi, o entrambi negativi.

Mostriamo che le tangenti alla circonferenza, nei punti in cui incontra l'asse delle x sono verticali: altrimenti, scegliamo la tangente nella x più piccola sia di pendenza positiva.



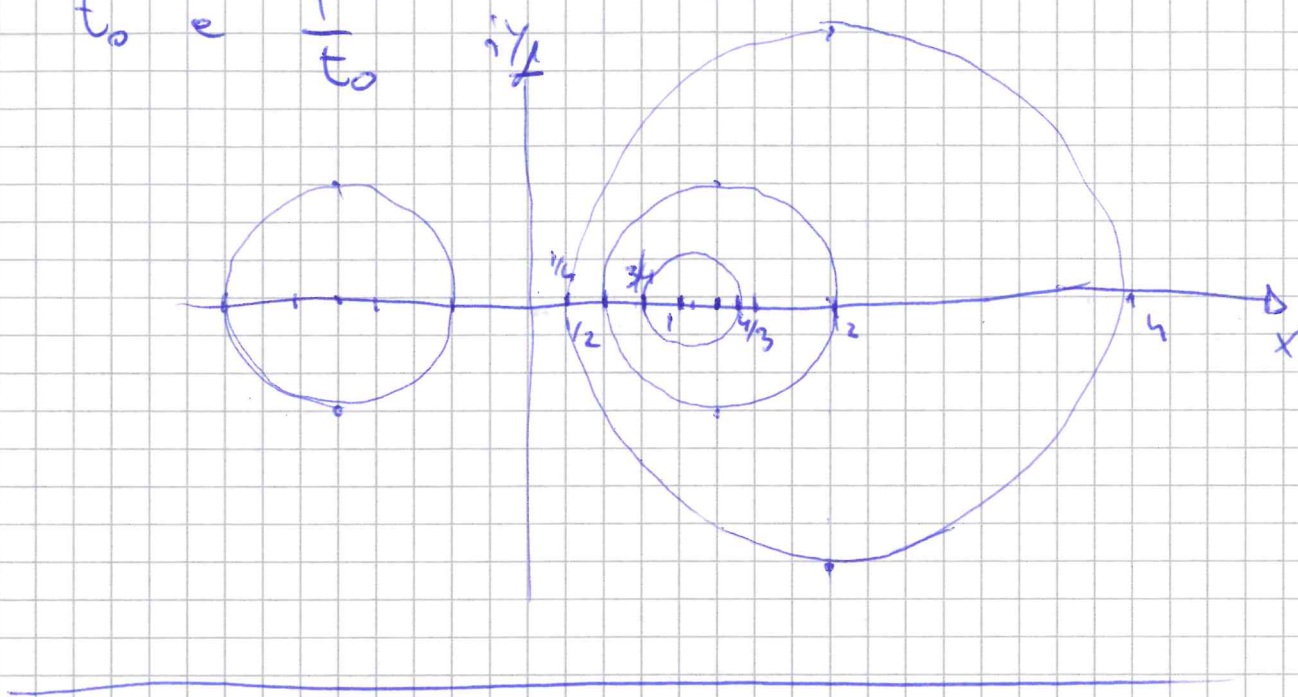
Allora il punto a minima distanza da 0 sarebbe al di sotto dell'asse delle x , chiamiamolo w_0 , allora $\|w_0\| = \min_{z \in \mathcal{C}} \|z\|$

ma allora $\|(w_0)^\perp\| = \frac{1}{\|w_0\|} = \max_{z \in \mathcal{C}} \|z\|$

Ma $\frac{1}{w_0}$ è al di sopra dell'asse delle x ,

mentre $\max_{z \in \mathcal{C}} \|z\|$ si ottiene sulla retta per 0 e w_0 .

Quindi la circonferenza C è
simmetrica rispetto all'asse delle x , e lo interseca
in t_0 e $\frac{1}{t_0}$



Bx 5

$$f[x_0, x_1, x_2] = \begin{bmatrix} -x_0 + 5x_1 + 6x_2 : -2x_0 + 8x_1 + 2x_2 : \\ 4x_0 - 18x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & -18 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -1(-40 + 36) + 2(-75 + 108) + 4(30 - 48) = \\ = 4 + 66 - 72 = -2$$

$\Rightarrow \text{car}(k) \neq 2$ f è proiettività

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 & 6 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 4 & -18 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda-8)(\lambda+5) + 36 \\ + 2(-15(\lambda+5) + 108) \\ + 4(30 + 6(\lambda-8)) =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 30\lambda + 66 - 72 + 24\lambda = \\ = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) + 6(-1-\lambda) = \\ = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

Autovalori $1, 2, -1$

Se $\text{car}(k) \neq 2, 3 \Rightarrow 3$ punti fissi

$$[-1 : -1 : 2], [-4 : -2 : 5], [-3 : -2 : 4]$$

2

-1

1

$$\text{crk}(\gamma) = 3: \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_0 - x_2 = 0$$

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{retta di pt. fissi}$$

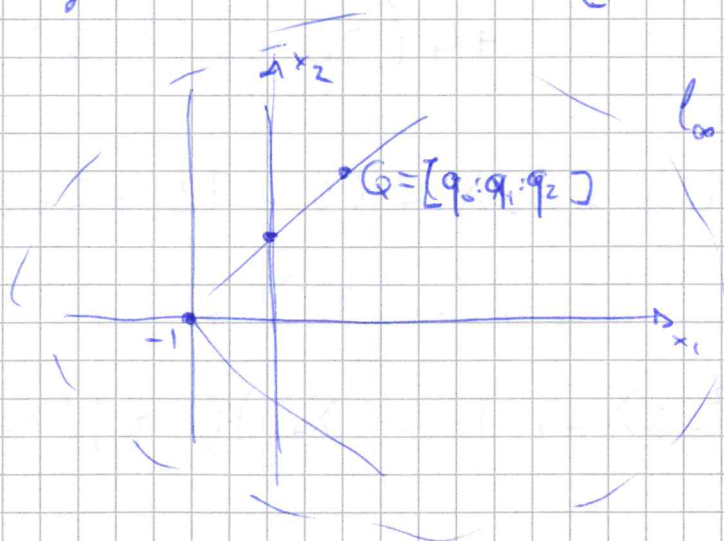
$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{punto fisso}$$

$$\text{Cer}(k) = 2 \quad A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle: x_1 = 0$$

$$\ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Proiezione di centro $[1: -1: 0]$ sulla retta $x_1 = 0$:



$$l: x_1 = 0$$

$$\pi: [x_0: x_1: x_2] \mapsto [x_0 + x_1: 0: x_2]$$

$$L([1: -1: 0], [q_0: q_1: q_2]) = \begin{vmatrix} 1 & q_0 & x_0 \\ -1 & q_1 & x_1 \\ 0 & q_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-q_2 x_0 - q_2 x_1 + (q_0 + q_1) x_2 = 0$$

$$ii) f(x_0, x_1, x_2) = [x_0 + x_1, x_0 + 3x_1, 2x_2]$$

150

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$\text{car}(A) \neq 2$ A invertibile

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1) = (2-\lambda)^3$$

$$V_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ una retta di punti fissi.}$$

$$\text{cs}(A) = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Ker}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio: in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ considerare il punto $P = [1:2:1]$ e

le rette $l_1 = \{x_0 + x_1 = 0\}$ $m_1 = \{x_0 + 3x_2 = 0\}$

$l_2 = \{x_0 - x_1 = 0\}$ $m_2 = \{x_2 = 0\}$

$l_3 = \{x_0 + 2x_1 = 0\}$ $m_3 = \{3x_0 + x_2 = 0\}$

Determinare i punti $Q \in \mathbb{P}^2$ tali che $\exists f: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$

con $f(P) = Q$ e $f(l_i) = m_i$, $i = 1, 2, 3$.

Fissato un tale Q , f è unica?

Svolgimento:

Posizione delle 3 rette:

i) chiaramente il punto $O = [0:0:1] \in l_1, l_2, l_3$

$\Rightarrow$ l_i sono 3 rette distinte del fascio per O

ii) analogamente $O' = [0:1:0] \in m_1, m_2, m_3$.

Inoltre $P \notin l_1, l_2, l_3$, chiamiamo

$l_4 = L(O, P)$: è la retta $\{2x_0 + x_1 = 0\}$

Una proiettività con le ipotesi sopra deve

mandare la retta $L(O, P)$ in $L(O', Q) =: m_4$

Inoltre deve essere $p(l_1, l_2, l_3, l_4) = p(m_1, m_2, m_3, m_4)$

e questo permette di trovare le equazioni

della retta $m_4 = L(O', Q)$:

in $(P^2)^V$ abbiamo

$$l_1 = [1:1:0]$$

$$l_2 = [1:-1:0]$$

$$l_3 = [1:2:0]$$

$$l_4 = [2:-1:0] = [1:-1/2:0]$$

$$\beta(l_1, l_2, l_3, l_4) = \frac{(z_4 - z_1)}{(z_4 - z_2)} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{-3/2}{1/2} \cdot \frac{3}{1} = -9$$

$$m_1 = [1:0:3] \quad m_2 = [0:0:1]$$

$$m_3 = [3:0:1] = [1:0:1/3]$$

$$m_4 = [1:0:3]$$

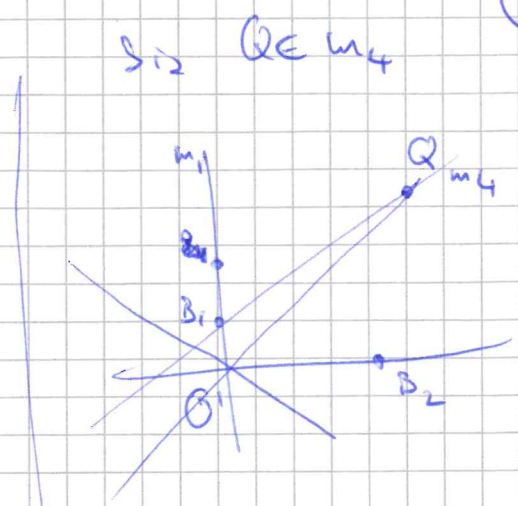
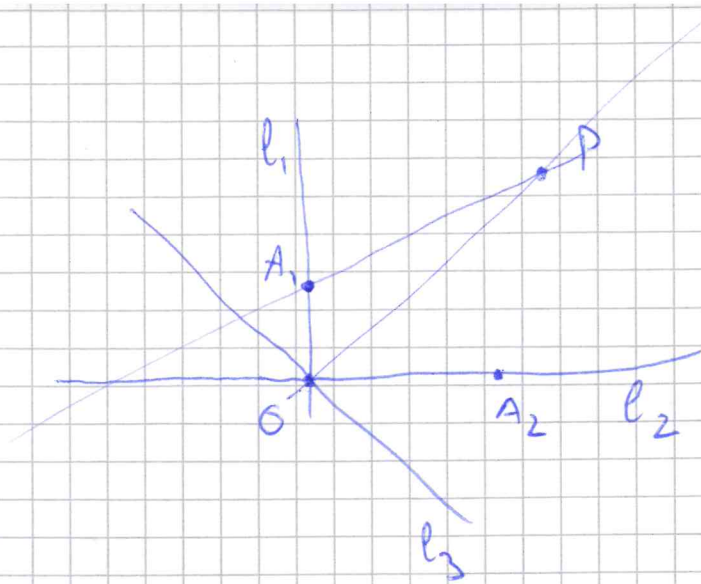
$$\beta(m_1, m_2, m_3, m_4) = \frac{z - 3}{z - \infty} \cdot \frac{1/3 - \infty}{1/3 - 3} = \frac{z - 3}{-8/3} = -9$$

$$\Rightarrow (z - 3) \cdot 3 = 9 \cdot 8 \Rightarrow z = 27.$$

m_4 ha equazione: $X_0 - 27X_2 = 0$

$\Rightarrow Q$ deve essere un punto di $m_4 \setminus \{[0:1:0]\}$.

Mostriamo che per ogni $Q \in m_4 \setminus \{[0:1:0]\}$
esiste una proiettività come sopra.



Scegliamo $A_1 \in l_1 \setminus \{O\}$

e un punto $A_2 \in l_2$, con $A_2 \neq O$ e $A_2 \neq l_2 \cap l(A_1, P)$

$\Rightarrow$ i punti $\{O, A_1, A_2, P\}$ sono in pos. generale.

$\Rightarrow$ formano un RP. per P^2 .

$\Rightarrow \exists!$ proiett. $f: P^2 \rightarrow P^2$ t.c.

$$f(O) = O' \quad f(A_1) = B_1 \quad f(A_2) = B_2 \quad f(P) = Q$$

Questo manda $f(P) = Q \quad f(l_1) = m_1 \quad f(l_2) = m_2$.

Dobbiamo verificare che anche $f(l_3) = m_3$.

Consideriamo $f^*: (P^2)^\vee \rightarrow (P^2)^\vee$

$$\begin{aligned} m_1 &\mapsto l_1 \\ m_2 &\mapsto l_2 \\ (m_3 &\mapsto l_3)?? \\ m_4 &\mapsto l_4 \end{aligned}$$

dove $f^*(r) = f^{-1}(r)$

$$\text{ma } p(m_1, m_2, m_3, m_4) = p(l_1, l_2, l_3, l_4) \Rightarrow f^*(m_3) = l_3 //$$