

§ 2.11 Trasf. di P' e Biepparto, (121)

Prop. Siano $P = P(V)$, $P' = P(V')$ con
 V, V' sp. vet. / k $\dim_k V = \dim_k V' = n$.

Dato una $(n+2)$ -upla ordinata di punti $P_0, \dots, P_{n+1} \in P$
 in pos. generale, e una $(n+1)$ -upla $Q_0, \dots, Q_{n+1} \in P'$
 in pos. generale, $\exists!$ iso. proiett. $f: P \rightarrow P'$ t.c.
 $f(P_i) = Q_i$.

Dim. esistenza: scegliamo base E di V e E' di V'
 tali che $P_0 = [e_0], \dots, P_n = [e_n], P_{n+1} = [e_0 + \dots + e_n]$
 $Q_0 = [e'_0], \dots, Q_n = [e'_n], Q_{n+1} = [e'_0 + \dots + e'_n]$

Sia $\varphi: V \rightarrow V'$, con matrice T_{n+1} in E, E' ,
 $e \mapsto e'$

Allora $[\varphi(v)] = f[v]$ ha le proprietà richieste.

Unicità: Sia $g: P \rightarrow P'$ un'altra iso. proiett. t.c.

$g(P_i) = Q_i$, sia $\psi: V \rightarrow V'$ t.c. $g([v]) = [\psi(v)]$

allora $\psi(e_0) = \lambda_0 e'_0, \dots, \psi(e_n) = \lambda_n e'_n$,

$\psi(e_0 + \dots + e_n) = \lambda_{n+1} (e'_0 + \dots + e'_n) = \lambda_0 e'_0 + \dots + \lambda_n e'_n$

ma allora $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \alpha \in k^*$

e $\psi = \alpha \cdot \varphi: V \rightarrow V'$ e $g = f$ ■

2 ATTENZIONE: c'è bisogno di un rif. proiettivo per l'unità, cioè $(n+2)$ punti in pos. generale!

Pr. $n=1$ $\mathbb{P}_k^1 = \mathbb{P}(k^2)$

$P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}_k^1$ 3 punti distinti

$P_0 = [\lambda_0, \mu_0], P_1 = [\lambda_1, \mu_1], P_2 = [\lambda_2, \mu_2]$

per ottenere una base $E = (e_0, e_1)$ che induce il sist. di riferimento $R(P_0, P_1, P_2) = R'$

scegliamo due rappresentate (λ_2, μ_2) di P_2 pointi.

sicché $\textcircled{*} \alpha \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \exists! \alpha, \beta \in k^n$

e qualsiasi punto $Q = [x_0, x_1]$ ha coordinate in $RP(P_0, P_1, P_2)$ date da $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \alpha \lambda_0 \\ \alpha \mu_0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \beta \lambda_1 \\ \beta \mu_1 \end{pmatrix}$

sono quelle che risolvono il sistema $\textcircled{**} \begin{cases} (\alpha \lambda_0) \gamma + (\beta \lambda_1) \delta = x_0 \\ (\alpha \mu_0) \gamma + (\beta \mu_1) \delta = x_1 \end{cases}$

$\textcircled{*} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Cramer}} \Rightarrow (\alpha, \beta) = \frac{1}{\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{pmatrix}$

$\textcircled{**} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix} \lambda_0 & \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{vmatrix} \lambda_1 \\ \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix} \mu_0 & \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{vmatrix} \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} \lambda_0 & x_0 \\ \mu_0 & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}$

$\underline{\text{Cramer}} \Rightarrow (\gamma, \delta) = \frac{1}{\det(\cdot)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & \lambda_1 \\ x_1 & \mu_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_0 & \lambda_1 \\ x_1 & \mu_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

Quindi dai 3 punti: $[d_0: p_0]$, $[d_1: p_1]$, $[d_2: p_2]$

$$\text{otteniamo } [x_0: x_1] = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc} x_0 & d_1 & d_0 & d_2 & : & d_0 & x_0 & d_2 & d_1 \\ x_1 & p_1 & p_0 & p_2 & : & p_0 & x_1 & p_2 & p_1 \end{array} \right]_{R'}$$

Def: Sia P una retta proiettiva, siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in P$

con P_1, P_2, P_3 punti distinti.

Chiamiamo "birapporto di P_1, P_2, P_3, P_4 "

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{d_1}{y_0} \in k \cup \{\infty\} \quad \left(\frac{d}{0} = \infty \right)$$

$$\text{dove } P_4 = [y_0: y_1]_{RP(P_1, P_2, P_3)}$$

Osservazione: Abbiamo visto sopra come cambiare coordinate: scriviamo, in un riferimento fissato R

$$P_1 = [\lambda_1: \mu_1] \quad P_2 = [\lambda_2: \mu_2] \quad P_3 = [\lambda_3: \mu_3] \quad P_4 = [\lambda_4: \mu_4]$$

$$\text{allora } P_4 = \left[\underbrace{\begin{array}{cc|cc} \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_4 & \mu_1 & \mu_3 \end{array}}_{y_0} : \underbrace{\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & \lambda_4 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_4 & \mu_2 & \mu_3 \end{array}}_{y_1} \right]_{R'}$$

in $R' = RP(P_1, P_2, P_3)$

$$\text{Quindi } \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}} \in k \cup \{\infty\}$$

In coordinate non omogenee:

Supponiamo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq 0$

Allora possiamo supporre $P_1 = [1:z_1]$, ..., $P_4 = [1:z_4]$

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}$$

In particolare vediamo che:

$$P_4 = P_1 \Rightarrow \beta = 0$$

$$P_4 = P_2 \Rightarrow \beta = \infty$$

$$P_4 = P_3 \Rightarrow \beta = 1$$

Teorema: Siano $P = P(V)$ e $P' = P(V')$ 2 sp. proiettivi,

con $\dim P = \dim P' = 1$. Siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in P$

e $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in P'$ con P_1, P_2, P_3 distinti e

Q_1, Q_2, Q_3 ~~non~~ distinti. Allora esiste un

isomorfismo $f: P \rightarrow P'$ t.c. $f(P_i) = Q_i$ ($i=1, \dots, 4$)

se e solo se $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$

Dati: Poiché P_1, P_2, P_3 e Q_1, Q_2, Q_3 son
punti distinti in P e P' , essi determinano
2 est. di rif. $R = RP(P_1, P_2, P_3)$ per P e
 $R' = RP(Q_1, Q_2, Q_3)$ per P' .

Sappiamo che esiste uno e un solo isom.

$f: P \rightarrow P'$ t.c. $f(P_i) = Q_i$ per $i=1, 2, 3$,
e la matrice in R e R' sarà $IA = I_3$.

Questo isomorfismo soddisfa

$$f(P_4) = Q_4 \Leftrightarrow P_4 = [y_0: y_1]_R \text{ e } Q_4 = [y_0: y_1]_{R'} \\ \Leftrightarrow \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \quad \blacksquare$$



Altre proprietà interessanti del birapporto:

Simmetria: Se P_1, P_2, P_3, P_4 sono distinti ($\beta \neq 0, 1, \infty$)

$$\beta = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(P_2, P_1, P_4, P_3) = \\ = \beta(P_3, P_4, P_1, P_2) = \beta(P_4, P_3, P_2, P_1)$$

$$\frac{1}{\beta} = \beta(P_1, P_2, P_4, P_3) = \beta(P_2, P_1, P_3, P_4) = \\ = \beta(P_4, P_3, P_1, P_2) = \beta(P_3, P_4, P_2, P_1)$$

E le altre permutazioni?

Utilizziamo l'espressione affine:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)} = \beta$$

$$\text{Calcoliamo } \beta(P_1, P_3, P_2, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)} =$$

$$\frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)} =$$

$$\frac{z_4 z_2 - z_4 z_3 - z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_4 z_3 - z_4 z_1 + z_2 z_1 - z_2 z_3}{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)} =$$

$$= \frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3) + (z_4 - z_2)(z_3 - z_1) - (z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1) + (z_4 - z_1)(z_2 - z_3)} =$$

$$(z_4 - z_3)(z_2 - z_1) + (z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)}} = 1 - \frac{1}{1 - \beta} = \frac{\beta}{\beta - 1}$$

$$1 - \beta = \beta(P_1, P_4, P_3, P_2) = \beta(P_4, P_1, P_2, P_3) =$$

$$= \beta(P_3, P_2, P_1, P_4) = \beta(P_2, P_3, P_4, P_1)$$

$$\frac{1}{1 - \beta} = \beta(P_1, P_4, P_2, P_3) = \beta(P_4, P_1, P_3, P_2) =$$

$$= \beta(P_2, P_3, P_1, P_4) = \beta(P_3, P_2, P_4, P_1)$$

$$\frac{\beta}{\beta - 1} = \beta(P_1, P_3, P_2, P_4) = \beta(P_3, P_1, P_4, P_2) =$$

$$= \beta(P_2, P_4, P_1, P_3) = \beta(P_4, P_2, P_3, P_1)$$

$$\frac{\beta - 1}{\beta} = \beta(P_1, P_2, P_4, P_3) = \beta(P_3, P_1, P_2, P_4) =$$

$$= \beta(P_4, P_2, P_1, P_3) = \beta(P_2, P_4, P_3, P_1)$$

Consideriamo la funzione $j: k \setminus \{0, 1\} \rightarrow k$

$$j(\beta) = \frac{(\beta^2 - \beta + 1)^3}{\beta^2 (\beta - 1)^2}$$

$k = \mathbb{C}$ e $\text{car}(k) \neq 2$

Prop: $j(\beta) = j(\beta') \Leftrightarrow \beta' \in \left\{ \beta, \frac{1}{\beta}, 1-\beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{\beta}{\beta-1}, \frac{\beta-1}{\beta} \right\}$

Dim: se $\beta' = \beta, \frac{1}{\beta}, 1-\beta, \dots, \frac{\beta-1}{\beta}$ allora $j(\beta') = j(\beta)$

funzione $\beta \in k \setminus \{0, 1\}$, allora β' verifica $j(\beta') = j(\beta)$ se e solo se β' è radice del polinomio

$$q(x) = (x^2 - x + 1)^3 - j(\beta) x^2 (x-1)^2 \in k[x]$$

q ha grado 6 e ha $\beta, \frac{1}{\beta}, 1-\beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{\beta}{\beta-1}, \frac{\beta-1}{\beta}$ come radici: se sono 6 radici distinte OK.

Altrimenti? Solo i casi $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}, -j, -j^2$ dove $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. In questi casi il polinomio q è

$$q(x) = (x+1)^2 (x-2)^2 (x-\frac{1}{2})^2 \quad \text{oppure}$$

$$q(x) = (x^2 - x + 1)^3 = (x+j)^3 (x+j^2)^3$$

quindi non ci sono altre radici. $\square$

Def.: dati $S, T \subset P(V)$ due sottospazi,

definiamo S e T "proiettivamente equivalenti"

se $\exists f: P(V) \rightarrow P(V)$ proiettività t.c. $f(S) = T$.

• Dati 4 punti distinti in P^1 , definiamo

$$j(P_1, P_2, P_3, P_4) = j(\beta(P_1, P_2, P_3, P_4)).$$

Oss. Gli insiemi $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e

$\{Q_1, \dots, Q_4\}$ sono proiettivamente equivalenti

$$\Leftrightarrow j(P_1, P_2, P_3, P_4) = j(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).$$

• La quaterna ordinata P_1, P_2, P_3, P_4 si dice

"armonica" se $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1$ ($\Rightarrow j = \frac{27}{4}$)

oppure che P_4 è il "quarto armonico dopo P_1, P_2, P_3 "

oppure che " P_3 e P_4 separano armonicamente P_1 e P_2 "

(es.) $\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 0 & 1 & 2 & \infty \end{matrix}$

$$\beta(0, 1, 2, \infty) = \frac{\infty - 0}{\infty - 2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\beta(0, 2, 1, \infty) = \frac{1/2}{1/2 - 1} = -1 \quad \left| \quad \beta(\infty, 0, 1, 2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

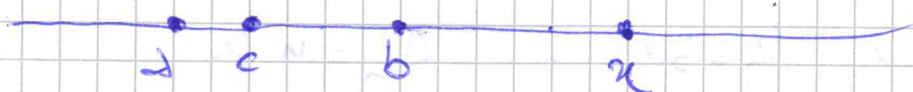
$$\beta(0, 2, \infty, 1) = -1$$

$$\beta(a, b, \infty, \frac{a+b}{2}) = \frac{\frac{a+b}{2} - a}{\frac{a+b}{2} - b} \cdot \frac{\infty - a}{\infty - b} = -1$$

il punto medio $\frac{a+b}{2}$ è il 4° armonico dopo a, b, ∞ .



$$\frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{c-b}{c-a} = -1 \quad \text{cioè} \quad \frac{x-a}{x-b} = \frac{a-b}{b-c}$$



x è il quarto armonico dopo a, b, c .

$$\begin{aligned} p(a, b, c, \frac{2ab}{a+b}) &= \frac{\frac{2ab}{a+b} - a}{\frac{2ab}{a+b} - b} \cdot \frac{-b}{-a} = \frac{ab - a^2}{ab - b^2} \cdot \frac{b}{a} = \\ &= -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1 \end{aligned}$$

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}} \quad \text{e' il quarto armonico dopo } a, b, c.$$

↑
è la media armonica (musicale)

Def: Una successione $A_1, \dots, A_n, \dots$ in $\mathbb{P}'$ si dice "armonica rispetto a P " se P è un punto A_i della successione sono separati armonicamente da A_{i-1} e A_{i+1} , cioè

$$p(P, A_i, A_{i-1}, A_{i+1}) = -1 \quad \forall i \geq 2$$

($\Leftrightarrow p(P, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}) = 1/2$)

Se $P = \infty$: $\beta(\infty, a, b, c) = 1/2$

$\Leftrightarrow \beta(a, b, c, \infty) = 1/2$

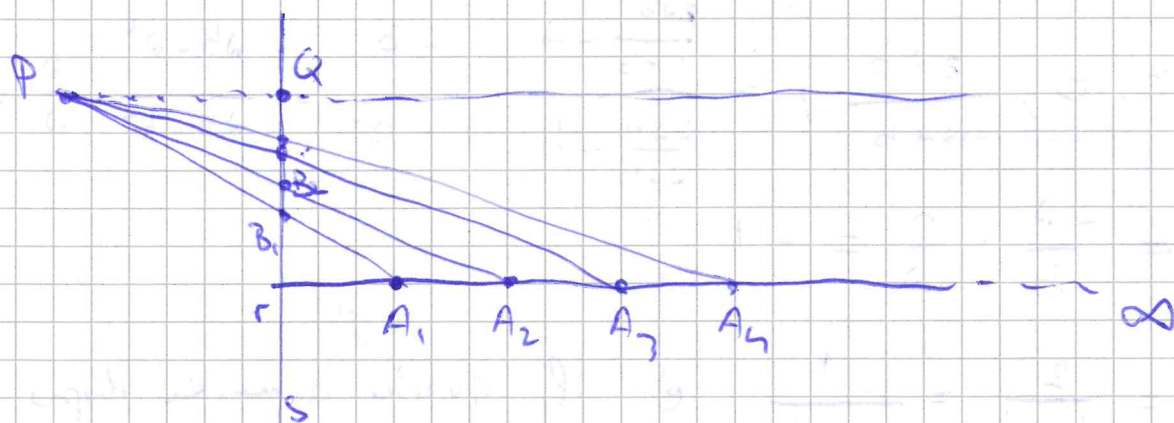
$\Leftrightarrow \beta(a, c, \infty, b) = -1$

$\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$

$\Rightarrow$ Se $P = \infty$ una sequenza armonica è

$A_1 = \alpha \quad A_2 = 2\alpha \quad A_3 = 3\alpha \quad \dots \quad A_n = n\alpha$

Geometricamente :

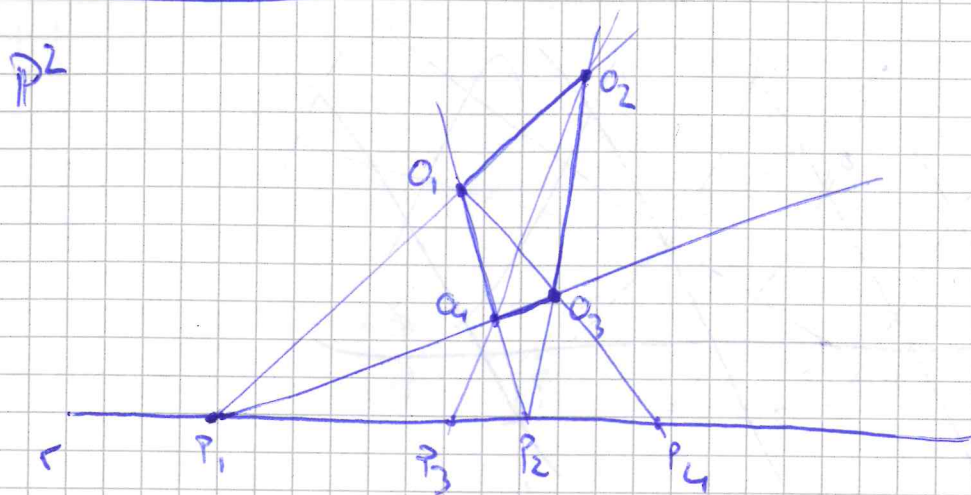


$A_1, A_2, \dots$ è seq. armonica in r risp. a ∞

$\Rightarrow B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ è armonica in ∞ risp. a Q

Altra Costruzione (visuale sempre a Pappo)

(B)



Allo $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1$ in $\mathbb{A}^1$:

$$R = RP(O_1, O_2, O_3, O_4) \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ O_1 = [1:0:0] & O_2 = [0:1:0] & O_3 = [0:0:1] \\ O_4 = [1:1:1] \end{matrix}$$

$$P_1 = L(O_1, O_2) \cap L(O_3, O_4) = [1:1:0]$$

$$P_2 = L(O_1, O_4) \cap L(O_2, O_3) = [0:1:1]$$

$$L(P_1, P_2) = [x_1 - x_2 + x_3 = 0]$$

$$L(O_2, O_4) \cap L(P_1, P_2) = [1:2:1] = P_3$$

$$L(O_1, O_3) \cap L(P_1, P_2) = [1:0:-1] = P_4$$

Un rif. proiett. per $r = L(P_1, P_2)$ e' $RP(P_1, P_2, P_3) = R'$

$$\text{e } P_4 = [1:-1]_{R'} \Rightarrow \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1 //$$

Questo si può usare per costruire il
quarto armonico dopo P_1, P_2, P_3 ---

