

§ 2.7 Cambio di coordinate omogenee e Proiettività (101)

Se $V = \text{sp. vet.} / k$, date 2 basi $E = (e_0, \dots, e_n)$ e

$E' = (e'_0, \dots, e'_n)$ sappiamo come cambiare coordinate:

scriviamo $E' = EA$ con $A \in GL_{n+1}(k)$

quindi $v = E'y$ con $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(k) = k^{n+1}$

allora $v = Ex = EAy$ $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ay = A \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Ora, se consideriamo il $RP(E)$ per $P(V)$

e il $RP(E')$, allora il vettore v identifica

un punto $[v] \in P(V)$, con coordinate omogenee

$[y_0, \dots, y_n]$ nel $RP(E')$ e $[x_0, \dots, x_n]$ nel $RP(E)$

se $v = Ex = E'y$, e abbiamo $x = Ay$.

Ma i riferimenti proiettivi corrispondono a basi di V

→ meno di ~~coefficienti~~ fattori di proporzionalità,

e in effetti: se al posto di $A \in GL_{n+1}(k)$

prendiamo $B = \alpha A \in GL_{n+1}(k)$ con $\alpha \in k^\times$

otteniamo una base $E'' = EB$ t.c. $RP(E'') = RP(E')$

Ricordiamo che un RP è dato da $n+2$ punti:

$P_0, \dots, P_n, U$ in pos. generale, e da una base E ,
e si passa da una descrizione all'altra prendendo

$$P_0 = [e_0], \dots, P_n = [e_n], U = [e_0 + \dots + e_n].$$

Se R_1 e R_2 sono due rif. proiettivi,

scriviamo $P \in P = P(V)$ in coord. omogenee

$$\text{come } [P]_{R_1} = [x_0 : \dots : x_n] \text{ e } [P]_{R_2} = [y_0 : \dots : y_n]$$

allora esiste una matrice $A \in GL_{n+1}(k)$ (unica, e unica
di un coeff. di proporzionalità) t.c.

$$\alpha X = \alpha \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A Y = A \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Fissare un RP equivale a dare una biezione

$$P(V) \longrightarrow \mathbb{P}_k^n$$

$$P \longmapsto [P]_R = [x_0 : \dots : x_n]$$

Questa biezione è un isomorfismo di
sp. proiettivi:

DEF: i) Un'applicazione $f: P(V) \rightarrow P(W)$ si dice "isomorfismo di sp. proiettivi" se esiste $\varphi: V \rightarrow W$ isom. di sp. vettoriali t.c.

$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

ii) Un'applicazione $f: P(V) \rightarrow P(W)$ si dice "trasformazione proiettiva" se esiste una applicazione lineare iniettiva $\varphi: V \rightarrow W$ tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

iii) Se $\varphi: V \rightarrow W$ è un'applic. lineare non nulla, e $H := P(\text{Ker}(\varphi)) \subseteq P(V)$ chiamiamo

"trasformazione proiettiva degenera" la
applicazione $f: P(V) \setminus H \rightarrow P(W)$
 $[v] \mapsto [\varphi(v)]$

Qss: i) Gli isomorfismi $P(V) \rightarrow P(V)$ sono detti "proiettività" e formano un gruppo detto gruppo lineare proiettivo e denotato $PGL(V)$.

C'è anche un omomorfismo suriettivo di gruppi $GL(V) \twoheadrightarrow PGL(V)$ che ha K^* come nucleo, quindi $PGL(V) \cong GL(V)/K^*$

i) Se $f: P(V) \setminus H \rightarrow P(W)$ è

trasf. proiettiva degenera, con $H = P(\text{Ker}(f))$.

E se $S = P(U) \subseteq P(V)$ sottosp.

allora $f|_{P(U) \setminus H}: P(U) \setminus H \rightarrow P(W)$ è

una transf. proiett. degenera.

Se poi $S \cap H = \emptyset$ (cioè se $U \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$)

allora $f|_S$ è una transf. proiettiva (non degenera)

Def. Sia $f: P(V_1) \rightarrow P(V_2)$ una transf. proiettiva,

siano R_1 e R_2 rif. proiettivi di $P(V_1)$ e $P(V_2)$

Allora scelte basi E_1 ed E_2 di V_1 e V_2 tali

che $R_1 = RP(E_1)$ e $R_2 = RP(E_2)$ si ha

$f([v]) = [\varphi(v)]$ e $\varphi(E_1) = E_2 A$. A matrice

che "rappresenta φ nei riferimenti R_1 e R_2 ".

Se $P = [x_1, \dots, x_n]$ e $f(P) = [y_1, \dots, y_m]$

allora $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ per qualche $\alpha \in k^*$,

e la matrice A è univ. determinata, e non
di multipl. per uno scalare $\lambda \in k^*$.

Affinità

$$A_k^n \xrightarrow{F} A_k^n$$

$$x \mapsto Ax + b$$

$$A \in M_{n \times n}(k) \quad \det A \neq 0$$

$$b \in M_{n \times 1}(k)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & A \\ \vdots & \\ b_n & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Guardiamo

$$j_0: A_k^n \rightarrow P_k^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto [1: x_1: \dots: x_n]$$

Allora $F: A_k^n \rightarrow A_k^n$ si estende ad un

$$\begin{array}{ccc} j_0 & & j_0 \\ P_k^n & \xrightarrow{f} & P_k^n \\ f & & \end{array}$$

proiettivo $f: P_k^n \rightarrow P_k^n$

tale che: i) $f(H_0) \subseteq H_0$

ii) $f(j_0(P)) = j_0(F(P)) \iff f \circ j_0 = j_0 \circ F$

Basta prendere f con matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & A \\ \vdots & \\ b_n & \end{array} \right)$$

questa è l'unica te. ① e ②

iii) Se $F = \text{Id}_{A_k^n} \Rightarrow f = \text{Id}_{P_k^n}$

Se f estende F e g estende G
 allora $g \circ f$ estende $G \circ F$.

$$P: V \rightarrow V \quad \begin{matrix} \nearrow \varphi \\ \nearrow k \end{matrix} \quad P \in GL(V)$$

Se $H \subset V$ iperspazio: $H = \ker(\varphi)$

$$P(H) = H \iff P^{-1}(H) = H \iff \ker(\varphi) = \ker(\varphi \circ P)$$

$$\iff \varphi \circ P = \lambda \varphi \quad \text{per un } \lambda \in k^*$$

$$\iff \varphi \text{ è autovettore di } \text{tp}: V^* \rightarrow V^*$$

Supponiamo $f: P(V) \rightarrow P(V)$ proiezione tale che per un iperspazio $H \subset P$ $f(H) = H$.

Allora $F = f|_{P \setminus H}: P \setminus H \rightarrow P \setminus H$ è una transf. affine. biettiva, quindi F è un'affinità.

Se si sceglie un rif. proiettivo RP per $P(V)$ f.e. H ha equazione $X_0 = 0$ in RP allora f si può rappresentare con una matrice

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right) \quad A$$

Osservazione:

$$\begin{array}{ccc} P(V) & \xrightarrow{f} & P(V) \\ \uparrow j_0 & & \uparrow j_0 \\ A_k^n & \xrightarrow{F} & A_k^n \end{array}$$

f è l'estensione di un'affinità su $P \setminus H$.

Abbiamo mostrato:

(107)

Teor: Sia $P = P(V)$, $H = P(W) \subset P(V)$ iperpiano.

Corr. bilineare: $\left\{ \begin{array}{l} F: P \setminus H \rightarrow P \setminus H \\ \text{affinit\`a} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f: P \rightarrow P \text{ proiettiva} \\ \text{t.c. } f(H) \subset H \end{array} \right\}$

[Ex] i) Mostrare che è un ISO di gruppi.

ii) Sia $P = P^1_R$, mostrare che esiste una proiettività $f: P \rightarrow P$ che non stabilizza nessun iperpiano (cioè f non ha punti fissi).

iii) Se $P = P^2_R$, mostrare che per ogni $f: P^2_R \rightarrow P^2_R$ esiste un iperpiano $H \subset P^2_R$ / $f(H) = H$

Tra le trasform. proiettive degeneri ce ne sono alcune che hanno un significato geometrico particolare: guardiamo prima una costruzione geometrica.

Consideriamo un punto $P \in \mathbb{P}^2$, e il fascio di rette per P . Un fascio di rette è uno spazio proiettivo (di dimensione 1 perché sono rette in un piano): infatti se diamo 2 rette r e s per P , queste sono 2 punti in $(\mathbb{P}^2)^\vee$, e il fascio di rette per P è dato dalle comb. lineari delle eq. di r e s , quindi corrisponde a $L(r, s) \subset (\mathbb{P}^2)^\vee$.

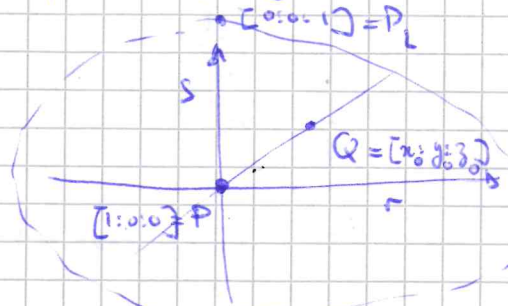
Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 \setminus \{P\} & \xrightarrow{\pi} & L(r, s) \\ & \downarrow & \\ Q & \longmapsto & L(P, Q) \end{array}$$

è uno sp. proiett. di dim. 1

In coord. scegliamo un rif. pr. $R(P_0, P_1, P_2, U)$ t.c.

$$P_0 = P, P_1 \in r, P_2 \in s$$



$$\begin{array}{l} r: z=0 \\ s: y=0 \end{array}$$

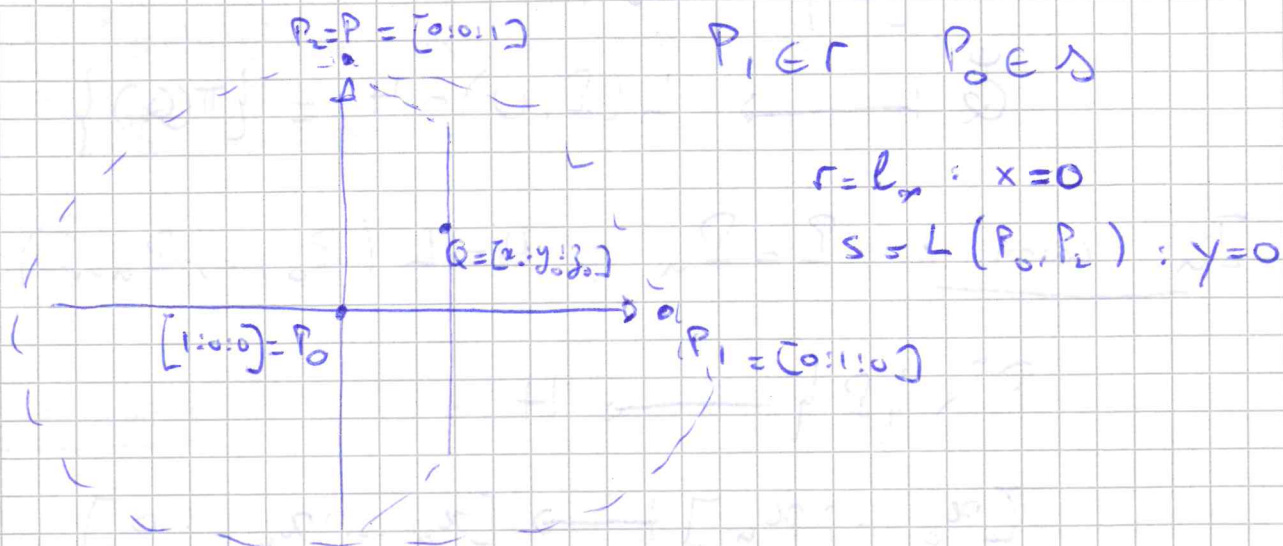
$$L(P, Q): z_0 y + (y_0) z = 0$$

$$\pi: [x_0: y_0: z_0] \longmapsto [y_0: z_0]$$

In un altro riferimento:

$$Q(P_0, P_1, P_2, U) \quad \text{t.c.} \quad P_2 = P$$

$$P_1 \in r \quad P_0 \in s$$



$$Q = [x_0:y_0:z_0]$$

$$L(Q, P_2): \text{equazione } x_0 y + y_0 (-x) = 0$$

$$P^2 \setminus \{P\} \longrightarrow L(r, s) = \{[\lambda : \mu] / l: \lambda y - \mu x = 0\}$$

$$Q = [x_0:y_0:z_0] \longmapsto [x_0:y_0]$$

$$\text{in part. } [1:y_0:z_0] \longmapsto [1:y_0]$$

Quindi, possiamo considerare un'iperpiano $H \subset P^2$ tale che $P \notin H$, otteniamo un'applicazione

$$P^2 \setminus \{P\} \xrightarrow{\pi} H$$

$$Q \longmapsto L(P, Q) \cap H$$

$$\swarrow \text{matrice } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nella costruzione sopra; se $H: z=0$ otteniamo

$$[x_0:y_0:z_0] \longmapsto [x_0:y_0:0]$$

Pic in generale: Se $P \in P^n$, $H \subset P^n$ ipso. $P \notin H$.

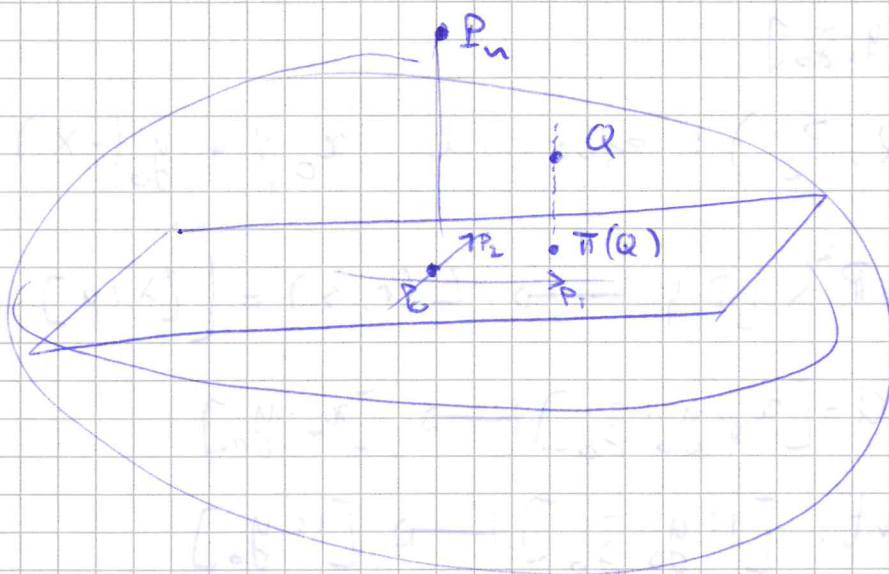
$$P^n \setminus \{P\} \xrightarrow{\pi} H$$

$$Q \mapsto L(P, Q) \cap H = \{\pi(Q)\}$$

In coord.: $P = P_n$, $H = L(P_0, \dots, P_{n-1})$

$$P^n \setminus \{P\} \longrightarrow H$$

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : 0]$$



matrice $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Def in generale ancora: $S \subset \mathbb{P}^n$ $\dim S = k$ (III)

Sia $T \subset \mathbb{P}^n$ t.c. $T \cap S = \emptyset$ $\dim T = n - k - 1$

La "proiezione da S su T di centro S " è

$$\mathbb{P}^n \setminus S \xrightarrow{\pi} T$$

$$Q \mapsto L(S, Q) \cap T = \{\pi(Q)\}$$

In coordinate: $S = L(P_0, \dots, P_k)$ $\dim S = k$

$T = L(P_{k+1}, \dots, P_n)$ $\dim T = n - k - 1$

$$\pi([x_0, \dots, x_n]) = [0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n]$$

è una trasf. proiettiva degenera.

Ex Mostare che ogni trasf. proiettiva degenera

è la composizione di una trasf. proiettiva (non-deg).
dopo una proiezione.

(Suggerimento: se $\varphi: V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare

$$\text{altr. } \varphi: V \rightarrow V / \ker(\varphi) \hookrightarrow W)$$

EX Sia $P = [1:-1:0]$

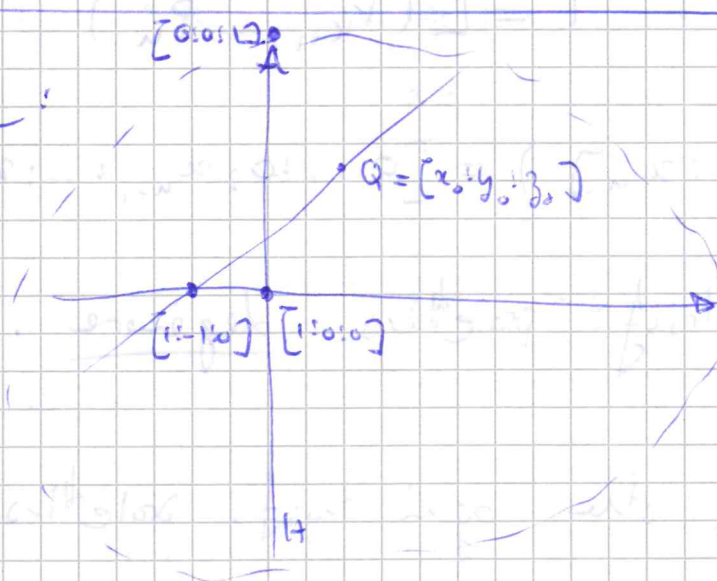
(12)

$$H: y=0 \quad H = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 / y=0\}$$

Scrivere la proiezione su H di centro P ,

in coordinate standard su $\mathbb{P}^2$ e
date dal rif. proiett. $R([1:0:0], [0:0:1], [1:0:1])$
di H .

Solgiunto:



$$0 = -z_0 X - z_0 Y + (x_0 + y_0) Z$$

$$L([1:-1:0], [x_0:y_0:z_0]) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & X \\ -1 & y_0 & Y \\ 0 & z_0 & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & X \\ -1 & y_0 & Y \\ 0 & z_0 & Z \end{vmatrix} = z_0 Z - z_0 Y + x_0 Z - z_0 X = 0$$

$$L([1:-1:0], [x_0:y_0:z_0]) \cap [y=0] = \{[x_0+y_0:0:z_0]\}$$

$$\pi([x_0:y_0:z_0]) = [x_0+y_0:0:z_0]$$

definito per $[x_0:y_0:z_0] \neq [1:-1:0]$ //

§ 2.9

Grassmanniana

(113)

Sia $V = \text{sp. vet.} / k$

$$\boxed{\text{con } \dim(V) \neq 2}$$

Def: Grassmanniana dei k -spazi di V è

$$G_k(V) = G_r(V, k) = \left\{ W \subseteq V \mid \dim W = k \right\}$$

↳ sottosp. vet.

(con $1 \leq k \leq \dim V$)

(Se $V = k^n$ $G_k(V) =: G(k, n)$)

es. $G_1(V) = P(V)$

$$G_{\dim V - 1}(V) = P(V^*)$$

Osservazione: $G_k(V) = \left\{ S \subseteq P(V) \mid \dim S = k-1 \right\}$

↳ sottosp. proiett.

In generale tutte le Grassmanniane si possono interpretare come sottoinsiemi di spazi proiettivi,

cioè $G_k(V) \subseteq P^N$ per qualche N ($N = \binom{n}{k} - 1$)

Vediamo come fare se $k=2$ e $\dim V = 4$:

$$G(2, 4) = \left\{ W \subseteq k^4 \mid \dim W = 2 \right\} = \left\{ l \subseteq P^3 \mid l \text{ retta} \right\}$$

è la Grassmanniana delle rette in P^3 ,

vediamo come costruirla come sottoinsieme in P^5 .

Due punti distinti $P, Q \in \mathbb{P}^3$ individuano una retta $L(P, Q) \subset \mathbb{P}^3$

Se $P = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3$ e $Q = [y_0 : y_1 : y_2 : y_3] \in \mathbb{P}^3$

Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

e poniamo $p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = x_i y_j - x_j y_i \quad 0 \leq i < j \leq 3$.

Poiché $P \neq Q$: p_{ij} non sono tutti nulli,

quindi otteniamo un punto $[p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}] \in \mathbb{P}^5$

Le p_{ij} sono dette coordinate Plückeriane della

retta $L(P, Q)$, e dipendono solo dalla retta l

e non dai punti $P, Q \in l$:

- se scegliamo altri rappresentanti per P , e Q otteniamo coordinate proporzionali.

- se cambiamo il punto P otteniamo

$$P' = [x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3] \quad \text{con} \quad x'_i = \lambda x_i + \mu y_i$$

$$\Rightarrow p'_{ij} = \lambda p_{ij}$$

- Stessa cosa se cambiamo il punto Q con $Q' \in L(P, Q)$.

Le coordinate Plückeriane verificano:

(115)

$$P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12} = 0 \quad (*)$$

Infatti:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 2(P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12}) = 0$$

Quindi i punti $[P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{12} : P_{13} : P_{23}]$ così ottenuti appartengono al sottospazio

$$S = \{ [P_{01} : \dots : P_{23}] \in \mathbb{P}^5 \mid P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12} = 0 \} \subset \mathbb{P}^5$$

Vediamo che S è in biiezione con $G(2,4)$:

Sia $G = [P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{12} : P_{13} : P_{23}] \in S$ un punto con $P_{01} \neq 0$

Consideriamo in $\mathbb{P}^3$ i punti $P = [0 : P_{01} : P_{02} : P_{03}]$ e

$Q = [-P_{01} : 0 : P_{12} : P_{13}]$ e scriviamo le coordinate

Plückeriane della retta $L(P, Q) \subset \mathbb{P}^3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ -P_{01} & 0 & P_{12} & P_{13} \end{pmatrix} \rightsquigarrow [P_{01}^2 : P_{01}P_{02} : P_{01}P_{03} : P_{01}P_{12} : P_{01}P_{13} : \underbrace{P_{02}P_{13} - P_{12}P_{03}}_{= P_{01}P_{23} \text{ per } (*)}]$$

$$= [P_{01} : P_{02} : \dots : P_{23}] = G$$

$$= P_{01}P_{23} \text{ per } (*)$$

Quindi l'app. $G(2,4) \rightarrow S$ è suriettiva.

Per l'injectività, supponiamo che una retta $r \in P^3$ abbia immagine $G = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{23}]$, sempre con $p_{01} \neq 0$ allora r non è contenuto nei piani $X_0 = 0$

o $X_1 = 0$, altrimenti si avrebbe $p_{01} = 0$

cioè $A = [0, a_1, a_2, a_3] = r \cap [X_0 = 0]$

e $B = [-b_0, 0, b_2, b_3] = r \cap [X_1 = 0]$

$\Rightarrow r = L(A, B)$ ha per intersezione G come coord. Plücker.

$$\Rightarrow [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{23}] = [a_1 b_0, a_2 b_0, \dots, a_1 b_3, a_2 b_3 - a_3 b_2]$$

Quindi $A = [0, a_1, a_2, a_3] = [0, p_{01}, p_{02}, p_{03}] = P$

$$e Q = [-p_{01}, 0, p_{12}, p_{13}] = [-a_1 b_0, 0, a_2 b_2 - a_1 b_3] =$$

$$= [-b_0, 0, b_2, b_3] = B$$

$\Rightarrow r = L(P, Q)$ e l'app. è injectiva.

Quindi abbiamo una biiezione

$$G(2,4) \longrightarrow S \subset P^5$$

$$\text{dove } S = \{[x_0, \dots, x_5] \in P^5 / x_0 x_5 - x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0\}$$

§ 2.10 Ipersuperfici

(17)

Abbiamo visto $G(2,4) \xrightarrow{\text{Plücker}} \mathbb{P}^5$ con
immagine $S \subset \mathbb{P}^5$ definito da un'equazione.

In generale $G(k,n) \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ con $N = \binom{n}{k} - 1$
e l'immagine è un sottospazio definito da più equazioni.

Vediamo un altro esempio di sottospazio
definito da un'equazione.

Consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

l'insieme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \{([x_0:x_1], [y_0:y_1]) \mid x_0, x_1, y_0, y_1 \in k, (x_0, x_1) \neq (0,0) \neq (y_0, y_1)\}$

Non è uno spazio proiettivo.

Abbiamo un'applicazione

$v: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ immersione di Segre
 $([x_0:x_1], [y_0:y_1]) \mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1]$

Altre i) v è b. definita

$$v([\lambda x_0 : \lambda x_1], [\mu y_0 : \mu y_1]) = [\lambda \mu x_0 y_0 : \lambda \mu x_0 y_1 : \lambda \mu x_1 y_0 : \lambda \mu x_1 y_1]$$

ii) $v(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = T \subset \mathbb{P}^3$ dove

$$T = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \mid z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0\}$$

Infatti chiamiamo $\text{Im}(v) \subseteq T$

Mostriamo che $T \subseteq \text{Im}(v)$:

sia $[z_0:z_1:z_2:z_3] \in T$, allora $z_0 z_3 = z_1 z_2$.

allora ~~non~~ supponiamo $z_0 \neq 0$ prendiamo

$$\begin{aligned} v([z_0:z_2], [z_0:z_1]) &= [z_0^2:z_0 z_1:z_0 z_2:z_1 z_2] \\ &= [z_0^2:z_0 z_1:z_0 z_2:z_0 z_3] = [z_0:z_1:z_2:z_3] // \end{aligned}$$

ii)

Inoltre $v:P^1 \times P^1 \rightarrow P^3$ è iniettiva.

$$\begin{aligned} \text{se } v([x_0:x_1], [y_0:y_1]) &= v([x'_0:x'_1], [y'_0:y'_1]) = \\ &= [z_0:z_1:z_2:z_3] \end{aligned}$$

Supponiamo $z_0 \neq 0$, allora $x_0, y_0, x'_0, y'_0 \neq 0$

Allora possiamo supporre $x_0 = y_0 = x'_0 = y'_0 = z_0 = 1$

$$\Rightarrow y_1 = z_1 = y'_1 \quad x_1 = z_2 = x'_1 //$$

$$\left(\text{Più in generale } P^n \times P^m \rightarrow P^{(n+1)(m+1)-1} \right. \\ \left. ([x_0:\dots:x_n], [y_0:\dots:y_m]) \mapsto [x_i y_j] \right)$$

La caratteristica del sottoinsieme $T \subseteq P^3$ è
che è descritto da un'equazione (omogenea).

Def: siano n e d interi, $k = \text{campo}$

sia $k[x_0, \dots, x_n]_d \subset k[x_0, \dots, x_n]$

il sottospazio generato dai monomi di grado d ;

questo è il sottospazio dei polinomi omogenei grado d ,

in $n+1$ variabili. $\dim_k(k[x_0, \dots, x_n]_d) = \binom{n+d}{n}$

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} x_0 & x_1 & x_2 & & x_n & & & & x_0^3 & x_1^2 & x_2^4 & & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & & & & \dots & \dots & \dots & & \dots \end{array} : x_0^3 x_1^2 x_2^4 \dots x_n^2$$

Consideriamo $P(k[x_0, \dots, x_n]_d)$ e lo chiamiamo

"sistema lineare delle ipersuperfici di grado d in $\mathbb{P}^n$ ".

Un elemento in $P(k[x_0, \dots, x_n]_d)$ si chiama una

"ipersuperficie di grado d di $\mathbb{P}^n$ ", e determina

una "equazione di grado d " detta equazione

dell'ipersuperficie: un elemento di $P(k[x_0, \dots, x_n]_d)$

è un pol. omogeneo (non nullo) di grado d ,

o meno di un coefficiente scalare, $F \in k[x_0, \dots, x_n]_d$

$$[F(x_0, \dots, x_n)] = [\lambda F(x_0, \dots, x_n)], \lambda \in k^\times,$$

equazione dell'ipersup. $F(x_0, \dots, x_n) = 0$.

Poiché F è omogeneo, $F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) =$

$$= \lambda^d F(x_0, \dots, x_n), \text{ quindi } [F(x_0, \dots, x_n)] \in P(k[x_0, \dots, x_n]_d)$$

determina un sottoinsieme, "supporto dell'ipersuperficie":

$$V(F) = \{ [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n_k / F(x_0, \dots, x_n) = 0 \} \subseteq \mathbb{P}^n$$

2 ATTENZIONE: non sempre il sottoinsieme determinato in maniera univoca $[F] \in \mathbb{P}(k[x_0, \dots, x_n]_d)$.

(es.) $k = \mathbb{R}$ $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$

$$\Rightarrow V(F) = \emptyset$$

$$G(x_0, \dots, x_n) = (x_0 + x_1)^2 + (x_0 - 3x_1)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$V(G) = \emptyset \quad [G(x_0, \dots, x_n)] \neq [F(x_0, \dots, x_n)].$$



Prima abbiamo dimostrato che la Grassmanniana

$G(2,4)$ è in bijezione con il supporto di un'ipersuperficie di grado 2 in $\mathbb{P}^5$, e

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con il supporto di un'ipersuperficie di grado 2 in $\mathbb{P}^3$.