11/03/2026

Proposizione 1.17 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) e sia $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora ogni elemento di V si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base.

Dimostrazione: Sia v un elemento di V. Dato che $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$, allora esiste almeno un modo di esprimere v come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$. Vogliamo dimostrare che infatti, dato che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base, esiste esattamente un modo di farlo.

Supponiamo che

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{e anche che}$$
$$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$

Vogliamo dimostrare che $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\dots$, $\alpha_n = \beta_n$.

$$\begin{aligned} 0_V = v - v &= (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) - (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \dots - \beta_n v_n \\ &= (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n \end{aligned}$$

Siccome $v_1, \dots, v_n$ sono l.i. allora si ha che gli scalari $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2$, $\dots$, $\alpha_n - \beta_n$ devono essere tutti nulli.

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1 \; ; \; \alpha_2 - \beta_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = \beta_2 \; ; \; \dots$$

$$\alpha_n - \beta_n = 0 \iff \alpha_n = \beta_n$$

Definizione 1.18 Data una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ in uno spazio vettoriale V su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$), per ogni vettore v in V consideriamo il modo unico di esprimerlo come combinazione lineare degli elementi di B,

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

e agli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ chiamiamo le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ e scriviamo

$$v = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Esempi In $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(2,-1),(3,4)\}$$

due basi di $\mathbb{R}^2$.

Prendiamo il vettore $v=(3,-1)$ in $\mathbb{R}^2$. Quali sono le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}_1$ e a $\mathcal{B}_2$?

$$(3,-1) = 3\,(1,0) + (-1)\,(0,1)$$

Posso quindi scrivere $(3,-1) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$

$$(3,-1) = \alpha\,(2,-1) + \beta\,(3,4)$$

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha + 3\beta \\ -1 = -\alpha + 4\beta \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 11 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{11}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1/11 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 1 + 4\frac{1}{11} = \frac{15}{11} \\ y = \frac{1}{11} \end{cases}$$

$$(3, -1) = \begin{pmatrix} \frac{15}{11} \\ \frac{1}{11} \end{pmatrix}_{B_2}$$