

Un paio di Esercizi semplici

(81)

EX in $A_{\mathbb{R}}^5$ è assegnato il sottospazio T di equazioni cartesiane (nel RA standard):

$$\begin{cases} Y_1 - 2Y_2 = 0 \\ Y_3 - Y_4 = 1 \\ Y_5 + 2 = 0 \end{cases}$$

Scrivere eq. cartesiane della chiusura proiettiva $\overline{T}^{(10)}$ e individuare i punti impropri (rispetto a j_0).

Svolgimento: rispetto a $j_0 \rightsquigarrow$ variabile x_0 f.c.

$Y_i = \frac{x_i}{x_0}$, quindi le eq. cartesiane diventano:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = x_0 \\ x_5 + 2x_0 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{sst. l.o.m.} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_0 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_0 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Matrice eq. di T :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +0 \\ -1 \\ +2 \end{matrix} = (A | \vec{b})$$

eq. omog. di $\overline{T}$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\underline{2} \ A)$$

$$\text{rg}(A) = 3 \Rightarrow \dim T = \dim \overline{T} = 2$$

Punti impropri: $\overline{T} \cap [x_0 = 0] = \overline{T} \cap H_0$

SLO associato

$$Ay = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = 2y_2 \\ y_3 = y_4 \\ y_5 = 0 \end{cases}$$

(82)

sol. $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \dim = 2 = \dim T$

~~per~~ vettori: $\{(2s, s, t, t, 0) / s, t \in \mathbb{R}\}$

$$\Rightarrow \text{punti impropri: } \overline{T} \cap H_0 = \{[0:2s:s:t:t:0] / s, t \in \mathbb{R}\}$$

$\dim \overline{T} \cap H_0 = 1$, è la retta proiettiva

per $[0:2:1:0:0:0]$ e $[0:0:0:1:1:0]$, d.

equazioni

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$$



[Ex] In $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$, con RP standard, considerare il sottospazio proiettivo S di equazioni omogenee:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_0 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_0 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Verificare che $S \not\subset H_0$ e affinnizzare S rispetto a j_0 .

Sublimento: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

S ha equazioni $Ax=0$, $\text{rg}(A)=3 \Rightarrow \dim S=2$

$S \cap H_0$ ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

poiché B ha rango 4 $\Rightarrow \dim(S \cap H_0) = 1$

$\Rightarrow S \cap H_0 \neq S$, cioè $S \not\subset H_0$.

Affinnizzazione di S rispetto a j_0 : basta porre $x_0=1$

(e $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$, $y_4=x_4$, $y_5=x_5$)

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 = 0 \\ y_3 - y_4 = 1 \\ y_5 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(S \setminus H_0) &= \{(2s, s, t+1, t, -2)\} \\ &\quad \text{in } \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^5 \\ &\quad \text{si } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Argomento più teorico...

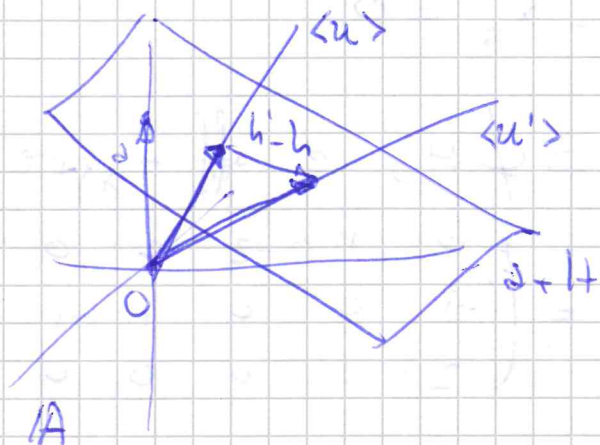
Servizio 25

(84)

$$V = \text{sp. vett.} / k \quad P = P(V) \quad H \subset V \text{ iperpiano} \quad H^\perp = P(H) \subset P$$

$$A = A(V) \text{ sp. affine} \quad \text{se } a \in V \setminus H \quad a+H \subset A \text{ iperpiano}$$

$$P = [u], P' = [u'] \notin H \\ (\text{cioè } u, u' \notin H)$$



$$a \in V \setminus H \\ \Rightarrow 0 \notin a+H$$

$$\text{allora } \langle u \rangle \cap (a+H) = a+h$$

$$\langle u' \rangle \cap (a+H) = a+h'$$

e $h-h'$ non dipende dal rappresentante

a (punto di appl. della sp. affine $a+H \subset A$)

ma solo della classe laterale $a+H$ in V/H .

Questo definisce una struttura di sp. affine su $P \setminus H$:

$$(P \setminus H) \times (P \setminus H) \longrightarrow H \quad \text{sp. vett. associato } H$$

$$(P=[u], P'=[u']) \longrightarrow \vec{PP'} = h' - h$$

con azione di sp. vett. H :

$$\text{se } P=[u] \text{ e } a+H \langle u \rangle = \{a+h\}$$

$$(P \setminus H) \times H \longrightarrow P \setminus H$$

$$(P=[u], \ell) \longmapsto [a+h+\ell]$$

(85)
Prewitz: ricordiamo che uno sp. affine A
 con giacitura uno sp. vettoriale V e' un
 insieme A munito di applicazione

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow V & \text{t.c.} & \text{i) } \forall P \in A, \forall v \in V \\ (P, P') &\longmapsto \overrightarrow{PP'} & & \exists! Q \text{ t.c. } \overrightarrow{PQ} = v \\ & & & \text{ii) } \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \end{aligned}$$

Questo definisce un'azione dello sp. vettoriale V su A :

$$\begin{aligned} A \times V &\longrightarrow A \\ (P, v) &\longmapsto P + v = Q, \text{ dove } Q \text{ t.c. } \overrightarrow{PQ} = v. \end{aligned}$$

Questa azione e' "semplicemente transitiva")

Come sopra: V sp. vett. / k $H \subset V$ iperpiano

$$P = P(v) \quad H = P(H) \subset P \quad P = [u], P' = [u'] \in P \setminus H$$

$$\begin{aligned} \varphi_{PP'} : \frac{V}{H} &\longrightarrow H \\ (a+H) &\longmapsto (h'-h) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{dove } \langle u \rangle \cap a+H = \{a+h\} \\ \langle u' \rangle \cap a'+H = \{a+h'\} \end{array} \right.$$

Allora: EX i) $\varphi_{PP'}$ e' ben definito:

non dipende dai rappresentanti u e u' scelti per P, P'
 ne' dal rappresentante a della classe laterale $a+H \in V/H$

$$(a+H = a'+H \Leftrightarrow a' = a + z \text{ con } z \in H \Leftrightarrow a' - a \in H)$$

$$\text{ii) } \varphi_{PP'} \text{ e' lineare: } \varphi_{PP'}((\lambda a_1 + \mu a_2) + H) = \lambda \varphi_{PP'}(a_1 + H) + \mu \varphi_{PP'}(a_2 + H)$$

Teor.: Dati: $V = \text{sp. vett.}/_K$, $H \subset V$, $P = P(V)$, $H = P(H) \subset P$

i) la scelta di una classe laterale $a+H \neq 0$

(cioè di un iperspazio affine $\neq 0$, con giacitura H , in $A = A(V)$)
definire una struttura di sp. affine su $P \setminus H$:

$$\begin{aligned} (P \setminus H) \times (P \setminus H) &\longrightarrow H & \left\{ \begin{array}{l} \text{dove } \langle u \rangle \cap (a+H) = \{a+h\} \\ \langle u' \rangle \cap (a+H) = \{a+h'\} \end{array} \right. \\ (P=[u], P'=[u']) &\longmapsto h'-h \end{aligned}$$

ii) $P \setminus H$ ha una struttura di spazio affine con
giacitura $\text{Hom}_K\left(\frac{V}{H}, H\right)$ data da:

$$\begin{aligned} (P \setminus H) \times (P \setminus H) &\longrightarrow \text{Hom}\left(\frac{V}{H}, H\right) \\ (P, P') &\longmapsto \left(\varphi_{PP'}: \frac{V}{H} \longrightarrow H \right) \end{aligned}$$

con azione descritta da: scegliere $a \in V \setminus H$

$$(P \setminus H) \times \text{Hom}\left(\frac{V}{H}, H\right) \longrightarrow P \setminus H$$

$$(P=[u], \varphi) \longmapsto P'=[a+h+\varphi(a+H)]$$

dove h è t.c. $\langle u \rangle \cap (a+H) = \{a+h\}$

[Ex] Verificare che P' dipende solo da P e da φ .

iii) Per ogni sottospazio ~~non propri.~~ $S = P(W) \subset P(V)$

tale che $S \not\subset H$, $S \cap P \setminus H$ è un sottosp. affine

di $P \setminus H$ con giacitura $\text{Hom}\left(\frac{V}{H}, W \cap H\right) \subset \text{Hom}\left(\frac{V}{H}, H\right)$

Ex i) Copiare bene l'enunciato

ii) Dm: Serres Geo 1 pp. 318-320.

Osservazione: i) $H \subset V$ $\dim P(V) = \dim V - 1 = \dim H$
 $\dim(V/H) = 1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{A}^1}(V/H, H) = \dim H$.

ii) nel punto (i) del Teorema, abbiamo una mappa dallo spazio affine $a+H \subset \mathbb{A}(V)$ verso P ,
 $j: a+H \longrightarrow P \setminus H \subset P$ (per hypoth. $a \notin H \neq 0$)
 $(a+h) \longmapsto [a+h]$

Nel caso $P = P_k^n$, e $a+H$ è l'iperpiano $x_0=1$ otteniamo proprio la mappa j_0 definita sopra.



Utilizziamo questo teorema (i) per mostrare il

Teorema di Pappo in versione proiettiva:

vediamo come passare dal caso affine a

quello proiettivo e viceversa.

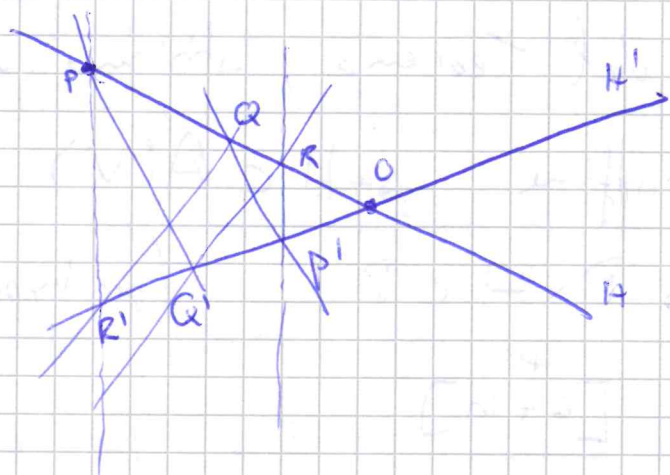
Il teorema di Pappo proiettivo si basa su quello affine. (82)

Teorema (Pappo - A): Sia A^2 un piano affine / k

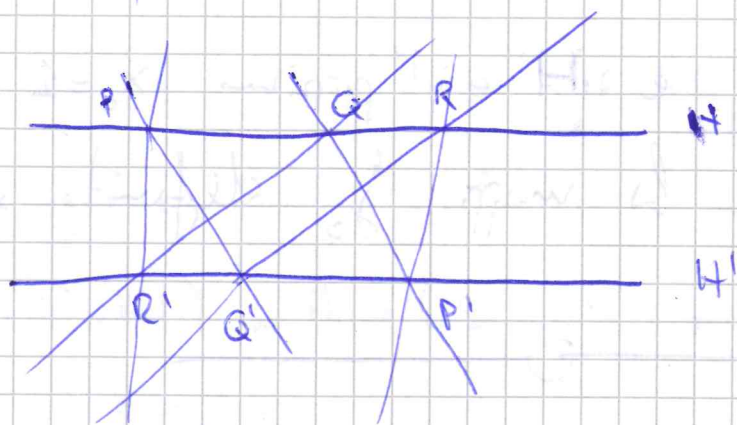
Siano H, H' 2 rette distinte in A^2 .

Se $P, Q, R \in H \setminus H'$ e $P', Q', R' \in H' \setminus H$ tali che

$\overline{PQ'} \parallel \overline{P'Q}$ e $\overline{QR'} \parallel \overline{Q'R}$ allora anche $\overline{PR'} \parallel \overline{P'R}$.



Se $H \cap H' = \{O\}$



Se $H \parallel H'$

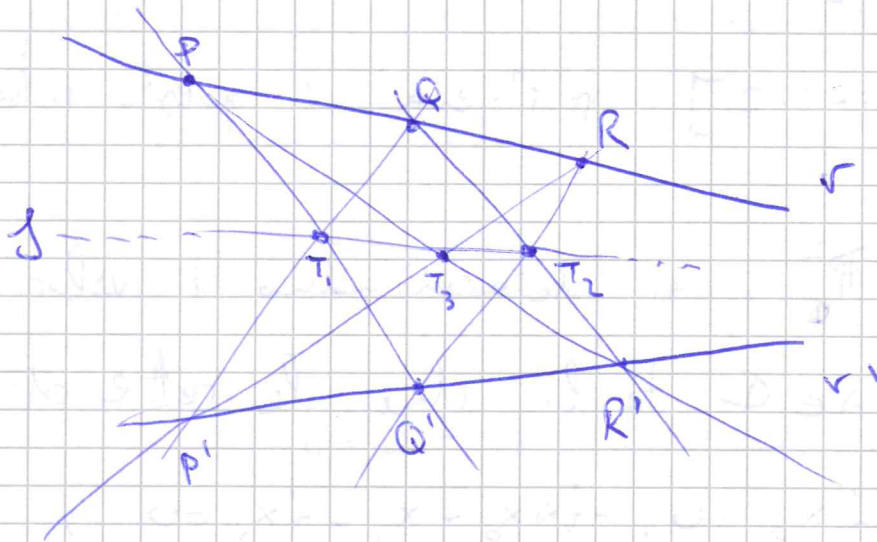
Dim: segue da Teorema.

Teorema (Pappo - Pascal): Sia $P = P(V)$ un piano proiettivo, siano r, r' due rette distinte in P .
 $P, Q, R \in r \setminus r'$ 3 punti distinti di r (non in r')
 $P', Q', R' \in r' \setminus r$ 3 punti distinti di r' .

Allora i 3 punti:

$$T_1 = L(P, Q') \cap L(Q, P'), \quad L(Q, R') \cap L(Q', R) = T_2$$

$$T_3 = L(P, R') \cap L(P', R) \text{ sono allineati.}$$



Dim: Sia Δ la retta tra T_1 e T_2 , è un iperpiano,
 allora $P \setminus \Delta$ è un piano affine, con Δ i punti impropri.
 $h = r \cap (P \setminus \Delta)$ e $h' = (r') \cap (P \setminus \Delta)$ sono 2 rette affini.
 $P, Q, R \in h$, $P', Q', R' \in h'$. Poiché $\overline{PQ'}$ e $\overline{QP'}$ si
 incontrano in un punto improprio, allora sono parallele
 in $P \setminus \Delta$, o così anche $\overline{QR'} \parallel \overline{RQ'}$. Pappo affine
 $\Rightarrow \overline{PR'} \parallel \overline{P'R}$, quindi $L(P, R') \cap L(P', R) \in \Delta$.

Esercizio in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ considerare i punti:

(90)

$$\left[\frac{1}{2} : 1 : 1\right], \left[1 : \frac{1}{3} : \frac{4}{3}\right], [2 : -1 : 2]$$

Mostrare che sono allineati, e scrivere un'equazione della retta che li contiene.

Svolgimento: scriviamo l'equazione della retta

per $\left[\frac{1}{2} : 1 : 1\right], \left[1 : \frac{1}{3} : \frac{4}{3}\right]$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x_0 \\ 2 & 1 & x_1 \\ 2 & 4 & x_2 \end{vmatrix} = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 0$$

In effetti $[2 : -1 : 2]$ appartiene a questa retta.

Esercizio: in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ si determinano i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che le rette di eq:

$$2x_1 - x_2 + 3ix_0 = 0, -i\lambda x_0 + x_1 - ix_2 = 0,$$

$$3ix_2 + 5x_0 + x_1 = 0 \quad \text{siano concorrenti}$$

(cioè abbiano un punto in comune).

Svolgimento: le 3 rette sono concorrenti sse il SLO delle 3 equazioni ha una soluzione non nulla,

sse

$$\det \begin{pmatrix} 3i & 2 & -1 \\ -i\lambda & 1 & -i \\ 5 & 1 & 3i \end{pmatrix} = -9 - 5i\lambda + i\lambda + 5 - 3 - 3\lambda^2 =$$
$$= -3\lambda^2 - 4i\lambda - 7 = 0$$

§ 2.6 Dualità

(91)

Sia V un k -sp. vet. - Sia $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$, $P = P(V)$

Chiamiam: $P^* = P(V^*)$ lo sp. proiettivo duale di $P(V)$.

allora $\dim P^* = \dim P$.

Se $\varphi, \varphi' : V \rightarrow k \in V^* \setminus \{0\}$

allora $[\varphi] = [\varphi'] \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^* / \varphi' = \lambda \varphi$

In questo caso $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi') \subset V$,

Quindi possiamo definire un'applicazione

$$\mathcal{J} : P^* \longrightarrow \{\text{iperpiani di } P^*\}$$

$$[\varphi] \longmapsto P(\text{Ker}(\varphi)) \subset P(V) = P$$

Oss: $\mathcal{J}$ è una bijezione detta "dualità".

(è b. definita, iniettiva, suriettiva).

Def: Siano $H_1, \dots, H_t \subset P$ iperpiani. Si dicono
linearmente INDIP. (o DIP.) se i punti:

$\mathcal{J}^{-1}(H_1), \dots, \mathcal{J}^{-1}(H_t)$ lo sono in P^* .

In coordinate: $P = P(V)$ $\dim P = n = \dim V - 1$ (92)

$E = (e_0 \dots e_n)$ base di $V \rightsquigarrow \mathbb{RP}(E)$ rif. point. di P

$E^* = (\varepsilon_0 \dots \varepsilon_n) \xrightarrow{\quad} V^* \rightsquigarrow \mathbb{RP}(E^*)$ rif. di P^*

$$\sigma([\varepsilon_j]) = P(\ker(\varepsilon_j)) = H_j \subset P(V)$$

Def. Se $S \subset P$ è un sottosp. di dim $k \leq n-1$

chiamiamo $\Lambda_1(S) = \{ H \overset{\text{iperpiano}}{\subset} P^* / S \subset H \subset P^* \} \subset P^*$
un "sistema lineare di iperpiani di centro S ".

Se $k = n-2$, $\Lambda_1(S)$ è un fascio di iperpiani.

Prop. Se $S \subset P$ ha dimensione k e equazioni

cartesiane
$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n = 0 = F_1(x_0, \dots, x_n) \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + \dots + a_{n-k,n}x_n = 0 = F_{n-k}(x_0, \dots, x_n) \end{cases} \quad (*)$$

Allora
$$\Lambda_1(S) = \left\{ H \subset P^* \text{ iperpiano di eq. } \begin{cases} \lambda_1 F_1(x_0, \dots, x_n) + \dots + \lambda_{n-k} F_{n-k}(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ \text{con } (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) \neq (0, \dots, 0) \end{cases} \right\}$$

Dim. chiaramente ogni perp. di quella forma contiene S .

Viceversa, sia H un iperp. di eq. $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$,
se $H \supset S$ allora il sistema $(*)$ e quello che si ottiene
aggiungendo l'eq. $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ sono equivalenti.
 $\Rightarrow a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ è comben. lin. delle altre

Nella dim. sopra, otteniamo $n-k$ iperpiani

$$H_j := \ker(F_j) = \{ a_{j0}x_0 + \dots + a_{jn}x_n = 0 \}$$

e ogni iperpiano $H \in \Lambda_1(S)$ ha eq. comb. lineare delle eq. degli H_j . $H_j \subset \mathbb{P}$ iperpiano, $\delta^1(H_j) \in \mathbb{P}^V$ punto.

In $\mathbb{RP}(E^*)$ gli H_j hanno coord. omog. $[a_{j0} : \dots : a_{jn}]$ e H ha coord. comb. lineari di queste.

$$\Rightarrow \delta^{-1}(\Lambda_1(S)) = L(\delta^1(H_1), \dots, \delta^1(H_{n-k}))$$

Inoltre, se $\dim S = k$, $\delta^1(H_1), \dots, \delta^1(H_{n-k})$ lin. INDIP.

Quindi $\delta^{-1}(\Lambda_1(S)) \subseteq \mathbb{P}^V$ è sottosp. proiett. di dim. $n-k-1$.

Se $S, S' \subseteq \mathbb{P}$ sono sottospazi, $S \subset S' \Rightarrow \Lambda_1(S') \subset \Lambda_1(S)$

Quindi abbiamo il seguente

Teorema 1: Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\dim \mathbb{P} = n$, $\delta: \mathbb{P}^V \rightarrow \{\text{iperp. in } \mathbb{P}\}$

Allora δ è una biiezione che fa corrispondere

ad ogni sottosp. proiett. di dim. $n-k-1$ di $\mathbb{P}^V$ un

sistema lineare di iperpiani di $\mathbb{P}$ di centro un

sottosp. proiettivo di dimensione k . Quindi δ induce

una biiezione tra sottospazi di $\mathbb{P}^V$ e sottosp. di $\mathbb{P}$ che rovescia le inclusioni. $\perp$

Def. Se $\dim S = k$ allora diciamo che
la dimensione del sist. lineare $\Lambda_1(S) = n - k - 1$

In particolare abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{J}: \mathbb{P}^n &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{iperpiani di } \mathbb{P}^n \\ \text{[4]} \longrightarrow \ker(\varphi) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}^\vee: \mathbb{P}^n \longrightarrow \left\{ \text{iperpiani di } \mathbb{P}^n \right\}$$

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{P}} &\longmapsto \mathcal{J}(\Lambda_1(P)) \subset \mathbb{P}^n \\ &\quad \quad \quad \text{"} \\ &\quad \quad \quad \left\{ \text{iperpiani } H \in \check{\mathbb{P}} / P \in H \right\} \end{aligned}$$

Convenzioni: $S = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{J}(\Lambda_1(S)) = \mathbb{P}^n \Leftrightarrow \dim \Lambda_1(S) = n$

Chiamiamo $\Lambda_1(\emptyset) = \mathbb{P}^n$ il sistema lin. improprio



(es) $P \in \mathbb{P}_n^2$ $\Lambda_1(P) = ?$

sia $r: a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 = 0$ t.c. $P \in r$

$s: b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 = 0$ t.c. $P \in s$

con $r \neq s$. Allora ogni retta in $\Lambda_1(P)$ ha

equazione $\gamma_{\lambda, \mu} \lambda (a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2) + \mu (b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2) = 0$

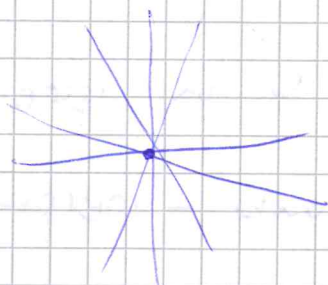
con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Chiaramente $\gamma_{\lambda, \mu} = \gamma_{c\lambda, c\mu}$.

Quindi, le rette in P^2 sono rappresentate

da coord. omogenee $[a_0 : a_1 : a_2]$, $[b_0 : b_1 : b_2] \in P^{2V}$

e $\Delta_1(P) = L([a_0 : a_1 : a_2], [b_0 : b_1 : b_2])$ è

una sp. proiett. di dimensione 1 in P^{2V}



Ex In P^3 descrivere $\Delta_1(S)$

i) se $S = P$ un punto

ii) se $S = L$ una retta $\subset P^3$.

Osserviamo che, $P = P(V)$ con $RP(E)$

e $P^V = P(V^*)$ con $RP(E^*)$

$P = [x_0 : \dots : x_n] \in P$ un punto

$H = [a_0 : \dots : a_n] \in P^V$ l'iperpiano di eq. $a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$

Allora Def: $P \in H$ sono incidenti se $P \in H$.

Cioè se $a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$, $\textcircled{*}$

Fissato $H = [a_0 : \dots : a_n]$, allora $P = [x_0 : \dots : x_n]$ verifica $\textcircled{*}$

$\Leftrightarrow P \in H$.

Viceversa: fissato $P = [x_0 : \dots : x_n]$

allora $H = [x_0 : \dots : x_n]$ verifica $(*) \Leftrightarrow H \in \Lambda_1(P)$.

e $\Lambda_1(P)$ è un sistema lineare di dimensione $n-1$.

Quindi in entrambi i casi la condizione sulle coordinate è soddisfatta da un iperpiano.

Questa è la dualità punto - iperpiano:

poiché $(*)$ è simmetrica, possiamo scambiare punti e iperpiani! Cioè:

Se abbiamo un insieme di punti e iperpiani

che soddisfanno certe relazioni di incidenza $(*)$

possiamo interpretare le coordinate dei punti come

coordinate di iperpiani e viceversa, otterremo un insieme

duale di punti e iperpiani con relazioni di incidenza.

Principio di dualità: Se dimostriamo una

proposizione che riguarda punti e iperpiani di P

e loro incidenze, allora abbiamo un'altra proposizione

vera ottenuta dalla prima scambiando le

parole "punto" e "iperpiano".

(es) Prop: in $\mathbb{P}^n$, dati $P_1, \dots, P_n$ punti indip.

$\exists!$ iperpiano $H \subset \mathbb{P}^n$ t.c. $P_1, \dots, P_n \in H$.

Duale: in $\mathbb{P}^n$, dati $H_1, \dots, H_n$ iperpiani indip.

$\exists!$ punto $P \in \mathbb{P}^n$ t.c. $P \in H_1, \dots, P \in H_n$.

(es) Prop: due punti distinti generano una retta

(Attenzione: retta in $\mathbb{P}^n$ = intersezione di $n-1$ iperpiani indipend.)

Quindi l'affermazione è:

2 punti distinti sono incidenti $n-2$ iperpiani indip.

Duale: 2 iperpiani distinti sono incidenti

$n-2$ punti linearmente indipendenti, cioè

2 iperpiani distinti si intersecano in un sottospazio proiettivo di codimensione 2.

Pappo-Duale: siano $P, Q \in \mathbb{P}^2$ 2 punti distinti.

siano r, s, t 3 rette per P , che non contengano Q .

Siano r', s', t' 3 rette per Q , che non contengano P .

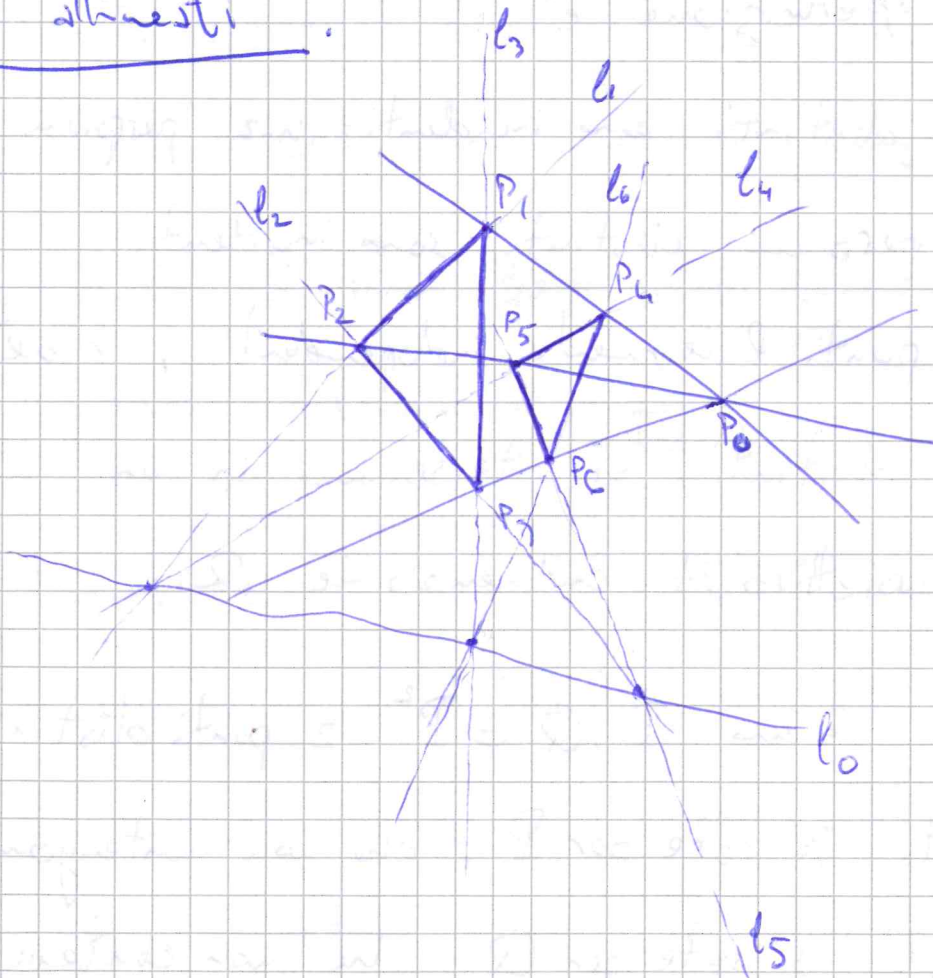
Consideriamo le 3 rette $l_1 = L(r, s')$, $l_2 = L(r', s)$, $l_3 = L(s, t')$.

$l_2 = L(r, t')$, $l_3 = L(s', t)$. Allora l_1, l_2, l_3 sono concorrenti //

Teorema (Desargues): $P = P^2 = P(V)$, $P_1, \dots, P_6 \in P$ 98
 punti distinti tali che le rette
 $L(P_1, P_4)$, $L(P_2, P_5)$, $L(P_3, P_6)$ siano
 concorrenti in P_0 , con $P_0 \notin \{P_1, \dots, P_6\}$.

Allora i punti:
 $L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6)$
 $L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6)$
 $L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$

sono allineati.



Desargues-Duale: in P^2 , $l_1, l_2, \dots, l_6 \in P^2$ 6 rette
 tali che i punti $l_1 \cap l_4$, $l_2 \cap l_5$, $l_3 \cap l_6$ siano
 allineati su una retta $l_0 \neq l_1, l_6$.

Allora le rette $L(l_1 \cap l_3, l_4 \cap l_6)$,
 $L(l_1 \cap l_2, l_4 \cap l_5)$, $L(l_2 \cap l_3, l_5 \cap l_6)$
 sono concorrenti.

Guardando la figura: Desargues è
 "equivalente" al Desargues-Duale!
 È un teorema auto-duale!

EX Enunciare Desargues Affine
 (punti impropri in l_0).

Dim (Desargues): se $v_0, \dots, v_6 \in V$ t.c. $P_i = [v_i]$

allora $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_6 \in k$ t.c.

$$v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_4 v_4 = \alpha_2 v_2 + \alpha_5 v_5 = \alpha_3 v_3 + \alpha_6 v_6$$

per ipotesi $P_0 \neq P_1, \dots, P_6 \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_6 \in k^*$.

Dall'equazione sopra vediamo che

$$\alpha_1 v_1 - \alpha_3 v_3 = -\alpha_4 v_4 + \alpha_6 v_6$$

$$\text{quindi } L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6) = [\alpha_1 v_1 - \alpha_3 v_3] = [-\alpha_4 v_4 + \alpha_6 v_6]$$

$$\text{e così } L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6) = [-\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3] = [\alpha_5 v_5 - \alpha_6 v_6]$$

$$\text{e } L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5) = [-\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2] = [-\alpha_5 v_5 + \alpha_4 v_4]$$

Quindi questi 3 punti ~~sono~~ sono linearmente dipendenti.
(la somma è 0)
cioè sono allineati. $\square$

[Ex] Dimostrare il viceversa: dati 6 pt. distinti $P_1, \dots, P_6$

se i 3 punti $L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6)$, $L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6)$

e $L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$ sono allineati,

allora le 3 rette $L(P_1, P_4)$, $L(P_2, P_5)$, $L(P_3, P_6)$

sono concorrenti.

(il teorema è un se e solo se).