

2. Spazi Proiettivi

(57)

- Prospettive Lineari: Brunelleschi

- Bei disegni: Piero della Francesca - Leonardo

§2.1 Definizioni

Def. Sia V un k -spazio vettoriale.

• Lo "spazio proiettivo associato a V " è l'insieme

$$\mathbb{P}(V) = \{ \ell \subseteq V \text{ t.c. } \ell \text{ sottospazio vettoriale, } \dim_k \ell = 1 \}$$

• Gli elementi di $\mathbb{P}(V)$, che sono sottospazi di V , sono detti: punti dello spazio proiettivo.

• Se $k = \mathbb{R}$ (o $k = \mathbb{C}$) sp. proiettivo reale (complesso)

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$$

$$\text{Se } \dim V = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \{ * \} \text{ e } \dim \mathbb{P}(V) = 0$$

$$\text{Se } \dim V = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \emptyset \text{ e } \dim \mathbb{P}(V) = -1$$

es) Se $V = k^{n+1}$ chiamiamo $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ o $\mathbb{P}_k^n$.

$$\text{se } v = (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \text{ se } v \neq (0, \dots, 0)$$

$$\text{chiamiamo } [x_0 : \dots : x_n] = \ell = \langle v \rangle \subset k^{n+1}$$

il corrispondente punto in $\mathbb{P}^n$.

$$\text{Chiaramente } [x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n] \in \mathbb{P}^n$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in k \text{ t.c. } y_i = \lambda x_i, \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Qs: Sia $V = \text{sp. vett.} / k$, c'è una bijezione

$$\frac{V \setminus \{0\}}{k^*} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

$$[v] \longmapsto l_v$$

dove $[v]$ è la classe di equivalenza di $v \neq 0$

per la relazione $v \sim v' \iff \exists \lambda \in k^* \text{ t.c. } v' = \lambda v$

e $l_v = \langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ è la retta $\langle v \rangle \subseteq V$

§2.2 Riferimenti proiettivi e coordinate omogenee

Def: i) Sia $P_0 = [v_0], \dots, P_k = [v_k]$ $k+1$ punti in $\mathbb{P}(V)$

decidiamo che sono "linearmente indipendenti"

se $v_0, \dots, v_k$ lo sono.

(ovviamente: non dipende dai rappresentanti scelti)

ii) decidiamo che $P_0 = [v_0], \dots, P_k = [v_k]$ sono

"in posizione generale" se

• $k \leq n = \dim \mathbb{P}(V)$ e $P_0, \dots, P_k$ sono lin. indep.

oppure $k > n$ e comunque scegliamo

$n+1$ punti tra $P_0, \dots, P_k$, questi sono lin. indep.

iii) Se $\dim \mathbb{P}(V) = n$, chiamiamo riferimento

proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ la scelta di $n+2$ punti (ordinati)

$P_0, \dots, P_n, P_{n+1}$ in posizione generale.

iv) Se $R = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ è un riferimento proiettivo di $P(V)$, chiamiamo i punti $P_0, \dots, P_n$ "punti fondamentali", e il punto P_{n+1} il "punto unito".

Osservazione: data una base $E = (e_0, \dots, e_n)$ di V , i punti $P_0 = [e_0], \dots, P_n = [e_n], P_{n+1} = [e_0 + e_1 + \dots + e_n]$ formano un sistema di riferimento proiettivo per $P(V)$.

es) $V = k^{n+1}$ base canonica $e_0 = (1, 0, \dots, 0) \dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$ otteniamo $P_0 = [1:0:\dots:0], \dots, P_n = [0:\dots:1], P_{n+1} = [1:1:\dots:1]$

Prop: Sia $R = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ un rif. proi. di $P(V)$.

Sia $u \in V \setminus \{0\}$ t.c. $[u] = P_{n+1}$, un rappresent. fisso.

Allora $\exists!$ base $\{v_0, \dots, v_n\}$ di V tale che

$$P_i = [v_i] \text{ per } i=0, \dots, n \text{ e } u = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

Dim: siano $\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_n$ rappresentati per $P_0, \dots, P_n$.

Cerchiamo $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ t.c.

$$\lambda_0 \tilde{v}_0 + \lambda_1 \tilde{v}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{v}_n = u : \text{esistono unici.}$$

($\square$) Mostrare che $\lambda_0, \dots, \lambda_n \neq 0$.

Prendiamo la base $\{v_i = \lambda_i \tilde{v}_i\}$ $\square$

(60)

Osservazione: dalla dimostrazione vedremo che se invece di u scegliamo il rapp. μu , per un $\mu \in k^*$, allora la base che otterremo sarà $\{\mu v_0, \dots, \mu v_n\}$.

Quindi un sist. di rif. proiettivo determina una base a meno di un coeff. ^{scalare} moltiplicativo.

Abbiamo dunque una bijezione

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rif. proiett. } R = \{P_0, \dots, P_n\} \\ \text{per lo spazio } P(V) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{basi di } V \right\} / \sim$$

dove 2 basi $E = (e_0, \dots, e_n)$, $F = (f_0, \dots, f_n)$ di V sono equivalenti: $\Leftrightarrow \exists \mu \in k^* \text{ t.c. } \forall i: f_i = \mu \cdot e_i$.

(es.) $V = k^{n+1} \quad P(V) = \mathbb{P}_k^n$

base canonica $\rightsquigarrow$ rif. proiettivo $[(1:0:\dots:0), \dots, (0:\dots:0:1)]$,
Standard $[1:1:\dots:1]$

scegliamo $u = (3, 3, \dots, 3)$

t.c. $[u] = [3:3:\dots:3] = [1:1:\dots:1]$

$\Rightarrow$ base $(3, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 3)$

Coordinate omogenee:

(61)

Fissiamo un riferimento proiettivo $R = \{P_0, \dots, P_n, P_{n+1}\}$
e ^{scegliamo} una base che lo rappresenti: $E = (e_0, \dots, e_n)$

tc. $P_0 = [e_0], \dots, P_n = [e_n], P_{n+1} = [e_0 + \dots + e_n]$

Se abbiamo un punto $P = [v]$ dove $v = E \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

allora diciamo che $P \in P(V)$ ha coordinate

omogenee $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ nel sist. di rif R .

Poiché anche $P = [\lambda v]$ per $\lambda \in k^*$, P ha

anche coordinate omogenee $[\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n]$,

quindi le coordinate omogenee sono determinate

→ meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Inoltre anche scegliendo un'altra base

$E' = (\mu e_0, \dots, \mu e_n)$ che rappresenta R

otteniamo $v = E' \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} x_0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\mu} x_n \end{pmatrix}$ e coordinate $[\frac{1}{\mu} x_0 : \dots : \frac{1}{\mu} x_n]$.

Quindi, un rif proiettivo $R = \{P_0, \dots, P_n\}$

(o la scelta di una base per V , a meno di un

fattore di proporzionalità) definisce una biiezione:

$$P(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$P = [v] \longmapsto [x_0 : \dots : x_n]$$

Chiamiamo $P^n = P(k^{n+1})$ lo sp. proiettivo standard (62)

$R = \{P_0 = [1:0:\dots:0], \dots, P_n = [0:\dots:0:1], P_{n+1} = [1:1:\dots:1]\}$
il riferimento proiettivo standard (associato base canonica)

§2.3 Sottospazi

Def: Se $W \subseteq V$ è un sottosp. vettoriale,
lo sp. proiettivo $P(W)$ è contenuto in $P(V)$,
ed è il sottoinsieme delle rette (vettoriali) in V
che sono contenute in W .

$P(W)$ è detto sottospazio proiettivo di $P(V)$.

Osservazione: $\dim P(W) = \dim W - 1$

e quindi $\dim P(V) - \dim P(W) = \dim V - \dim W$

e questa è la "codimensione di $P(W)$ in $P(V)$ ".

Un sottospazio di codimensione 1 è detto "iperpiano".

Anche nel caso proiettivo possiamo dare equazioni
cartesiane o parametriche, fissando un rif. proiettivo

- Cartesiane: Equazioni (omogenee) per $W = \text{eq. per } P(W)$
(nelle coordinate omog.)

- Parametriche:

Parametriche: $\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(\langle w_0, \dots, w_m \rangle) \subseteq \mathbb{P}(V)$ (63)

$$P_0 = [w_0], \dots, P_m = [w_m] \in \mathbb{P}(W)$$

e $\mathbb{P}(W)$ è il più piccolo sottosp. proiettivo che contiene $P_0, \dots, P_m$.

Più in generale se $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$, con $W_1, W_2 \subseteq V$. Chiamiamo $L(S_1, S_2)$ il più piccolo sottosp. proiett. che contiene S_1 e S_2 .

$$\text{Allora } L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2).$$

Anche l'intersezione è un sottosp. proiett. e verifica $S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$.

Grassmann: la formula di Gr. vettoriale implica immediatamente quella proiettiva:

$$\dim(L(S_1, S_2)) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

$$\text{Poiché } \dim L(S_1, S_2) \leq \dim \mathbb{P}(V)$$

$$\Rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(\mathbb{P}(V))$$

In part. se $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$

$$\Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$$

Quindi se $\dim P(V) = 2$ (piano proiettivo)
e $\dim S_1 = \dim S_2 = 1$ (rette proiettive)
 $\Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

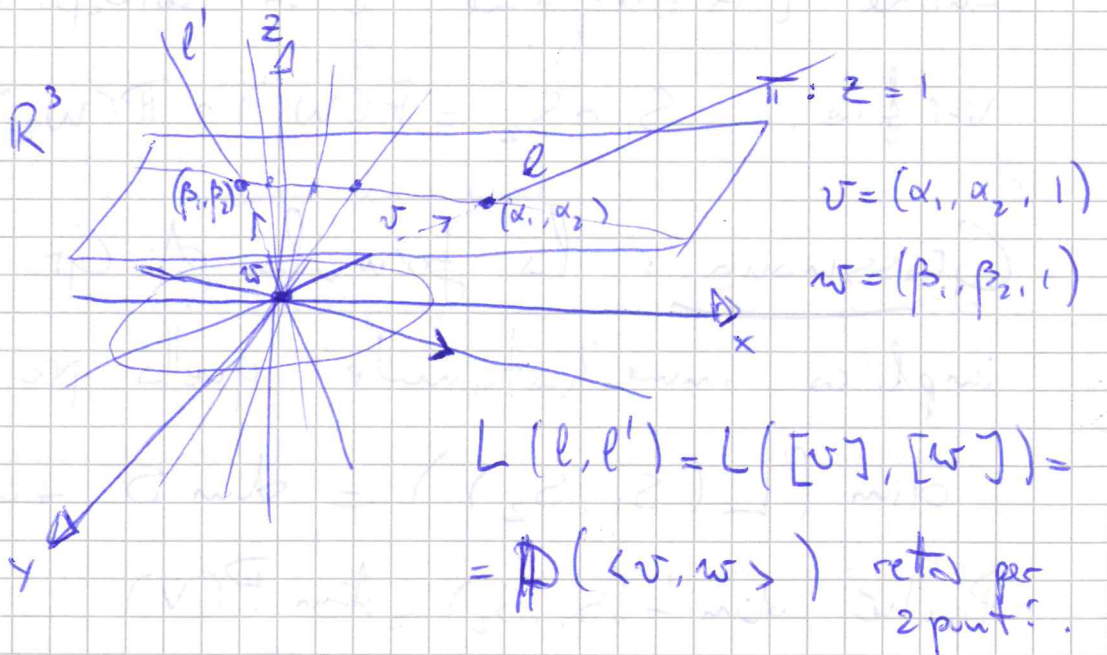
Invece se $\dim P(V) = 3$,
puo' avere $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ con S_1, S_2 rette,
in questo caso $\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 + 1$
(perche $\emptyset = P(\langle 0 \rangle)$ ha $\dim = -1$).



4 Come rappresentiamo uno sp. proiettivo?

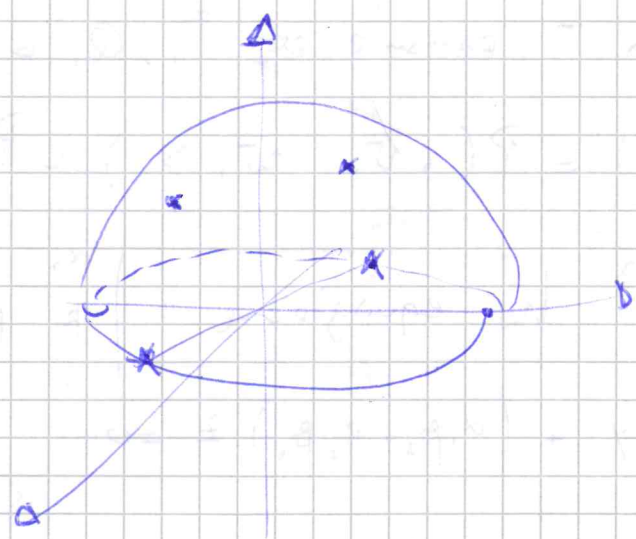
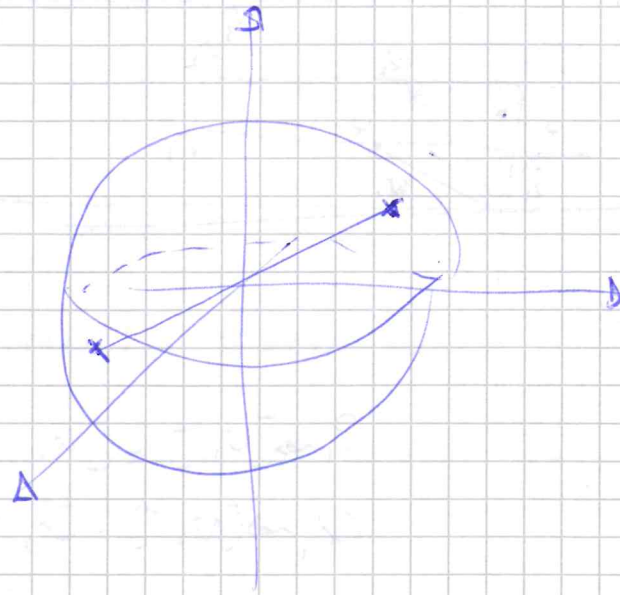
es.

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

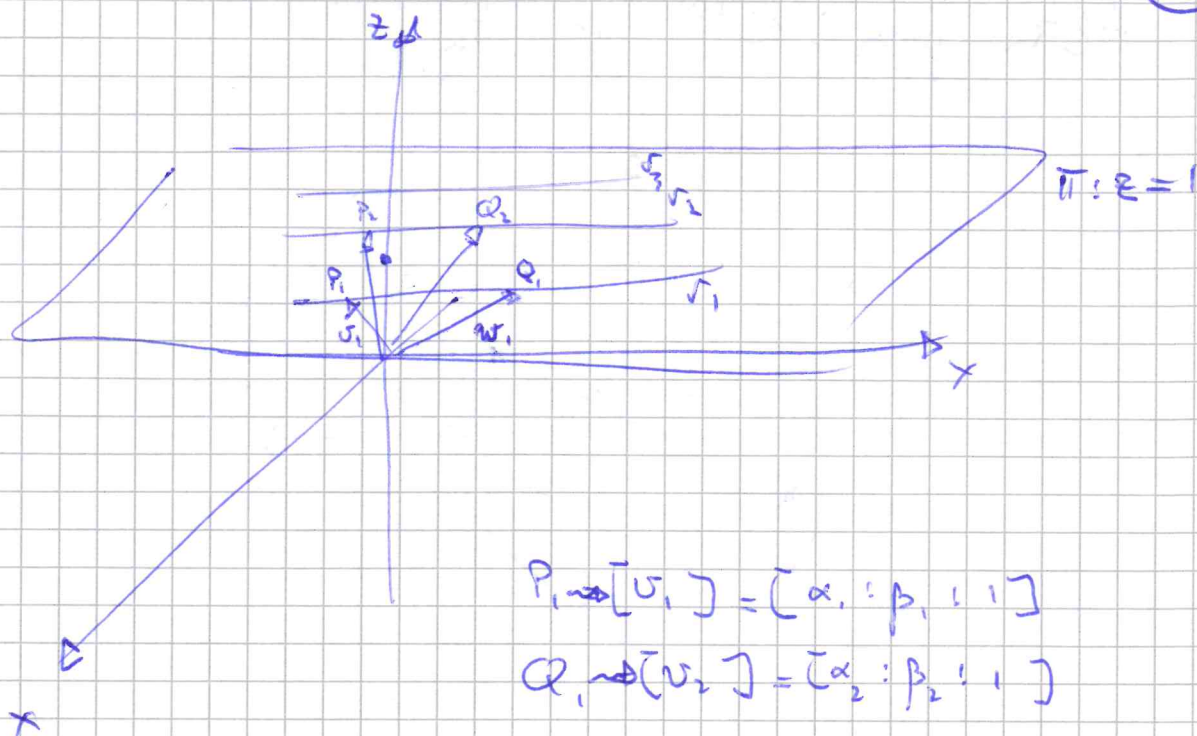


Per i due punti $[1:0:0]$ e $[0:1:0]$ passa un'unica
retta: la retta $L(P_0, P_1) \subset \mathbb{P}^2$ di equazione $z=0$;
nel disegno sopra e' la retta all'infinito

Altre possibilità per $P^2_{\mathbb{R}}$



Rette parallele?



$$P_1 \rightsquigarrow [v_1] = [\alpha_1 : \beta_1 : 1]$$

$$Q_1 \rightsquigarrow [v_2] = [\alpha_2 : \beta_2 : 1]$$

r_1 = retta affine in π , passante per $P_1, Q_1 \in \mathbb{R}^3$

$$\overline{r_1} = L(P_1, Q_1) = P(\langle v_1, w_1 \rangle) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}^3)$$

il piano $\langle v_1, w_1 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ ha equazione: $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x \\ \beta_1 & \beta_2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$

$$(\beta_1 - \beta_2)x + (\alpha_2 - \alpha_1)y + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)z = 0$$

per $z=1$ eq. della retta affine $r_1: (\beta_1 - \beta_2)x + (\alpha_2 - \alpha_1)y + C = 0$

$$\text{per } z=0 \text{ otteniamo: } (\beta_1 - \beta_2)x + (\alpha_2 - \alpha_1)y = 0$$

in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ otteniamo un "punto improprio" della retta $L(P_1, Q_1)$:

il punto $[\alpha_1 - \alpha_2 : (\beta_1 - \beta_2) : 0]$.

Prendiamo ora una retta r_2 parallela a r_1 in π , e

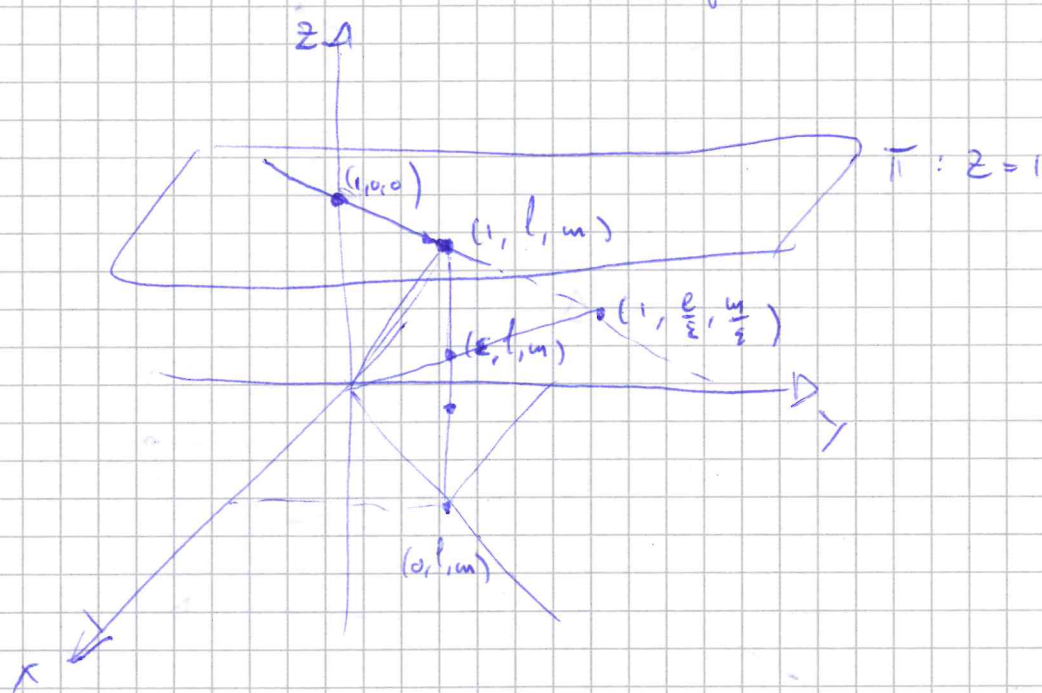
facciamo la stessa operazione con 2 punti P_2, Q_2

$$P_2 \rightsquigarrow [v_1'] = [\alpha_1' : \beta_1' : 1] \quad Q_2 \rightsquigarrow [v_2'] = [\alpha_2' : \beta_2' : 1]$$

Se $\alpha_1 / \beta_1 \neq \alpha_2 / \beta_2$ allora $Q_1 - P_1$ e $Q_2 - P_2$ sono proporzionali,
 quindi le equazioni $(\beta_1 - \beta_2)x + (\alpha_2 - \alpha_1)y = 0$
 e $(\beta'_1 - \beta'_2)x + (\alpha'_2 - \alpha'_1)y = 0$ sono proporzionali.

Quindi $[\alpha_1 - \alpha_2 : \beta_1 - \beta_2 : 0] = [\alpha'_1 - \alpha'_2 : \beta'_1 - \beta'_2 : 0]$

le rette hanno lo stesso punto improprio.
 Come interpretiamo il punto improprio?



Tra tutte le rette parallele scegliamone una che
 passi per $(1,0,0)$, e prendiamo un suo altro
 punto $(1, l, m)$. Tra i vettori nel piano

$\angle(0,0,1), (l, m, 1)\rangle$ ci sarà anche (l, m, ε) ,
 che identifica il punto $(l/\varepsilon, m/\varepsilon, 1)$

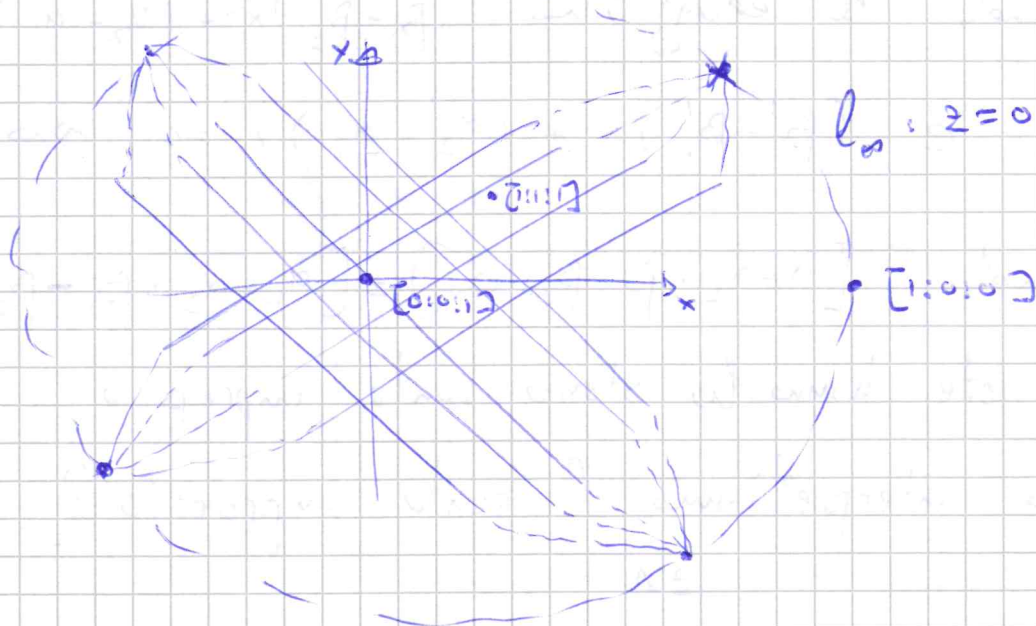
per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo che $(l, m, 0)$ è la direzione della
 retta e il "punto all'infinito della retta".

Quint position representation

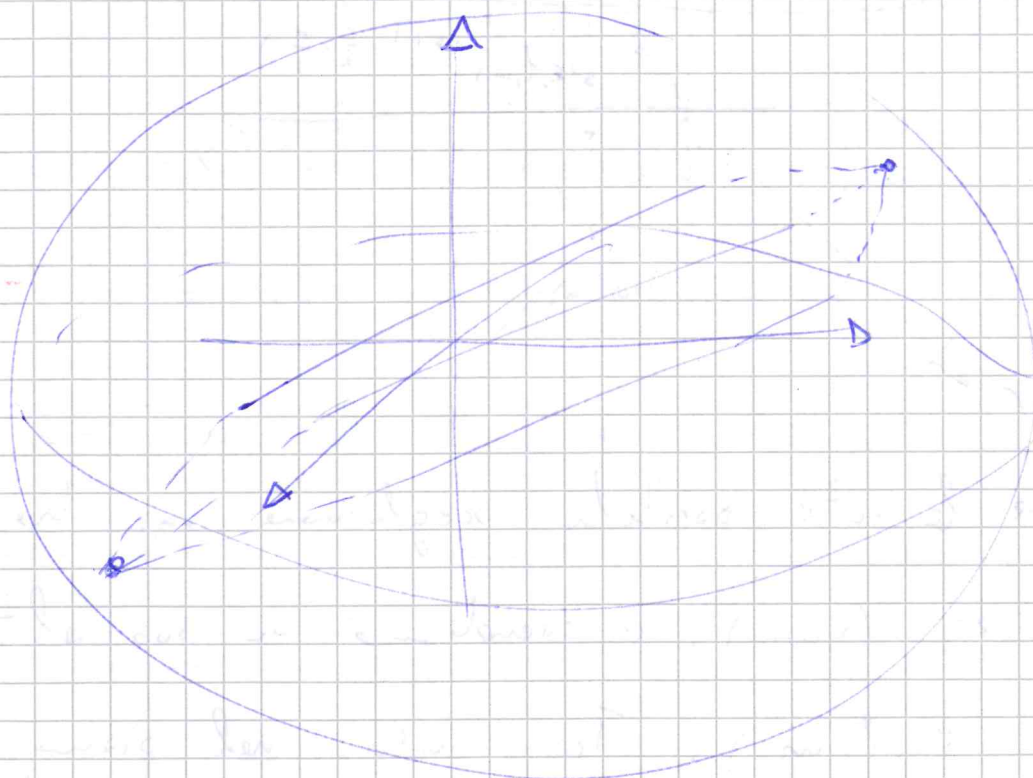
P^2_{12}

cone

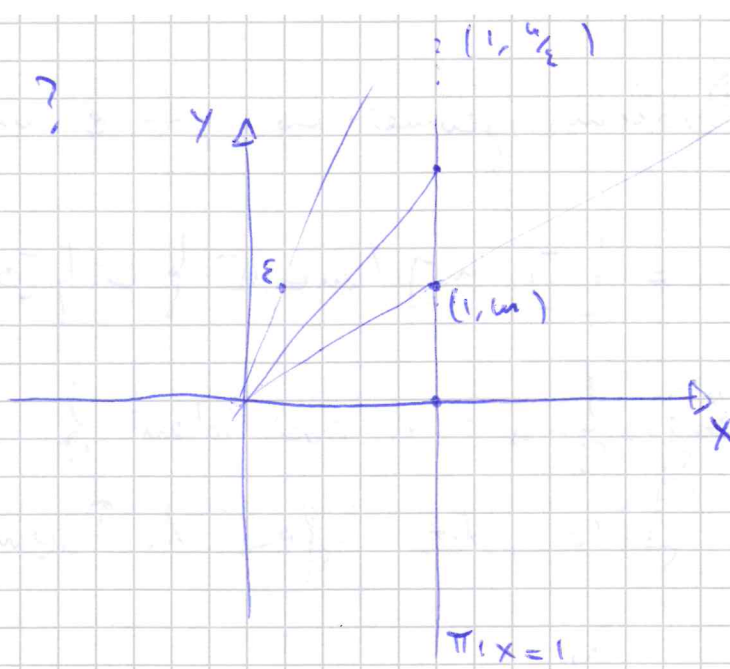
(68)



P^3_{12}



(69)

 $e \notin \mathbb{R}^1$  $r: y=mx \rightarrow \text{ponto } [1:m]$

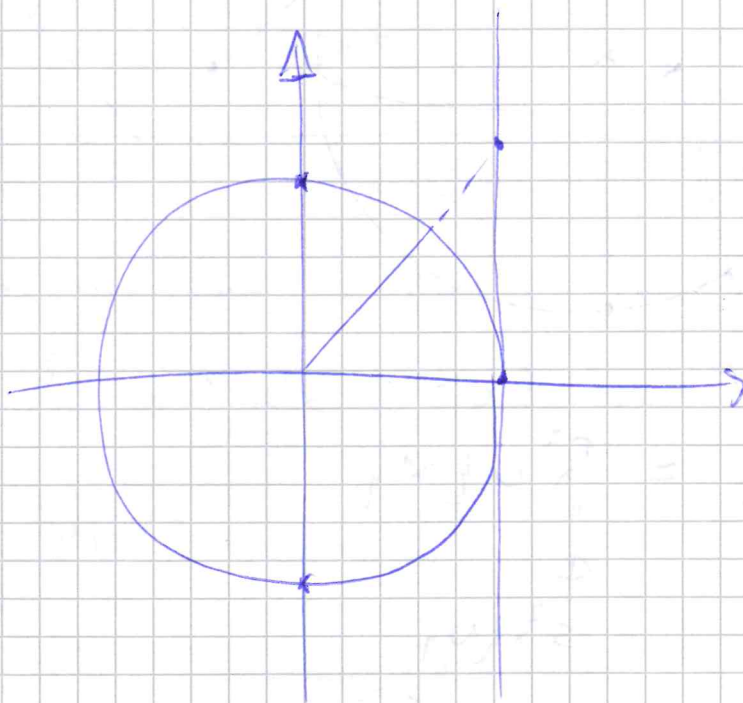
$$y = \frac{m}{2}x$$

$$x = \frac{\epsilon}{m}y$$

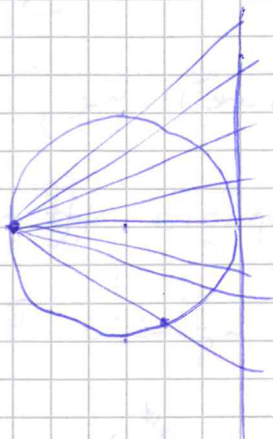
$$\epsilon \rightarrow 0$$

$$x=0$$

}

ponto $[0:1]$ ∞ 

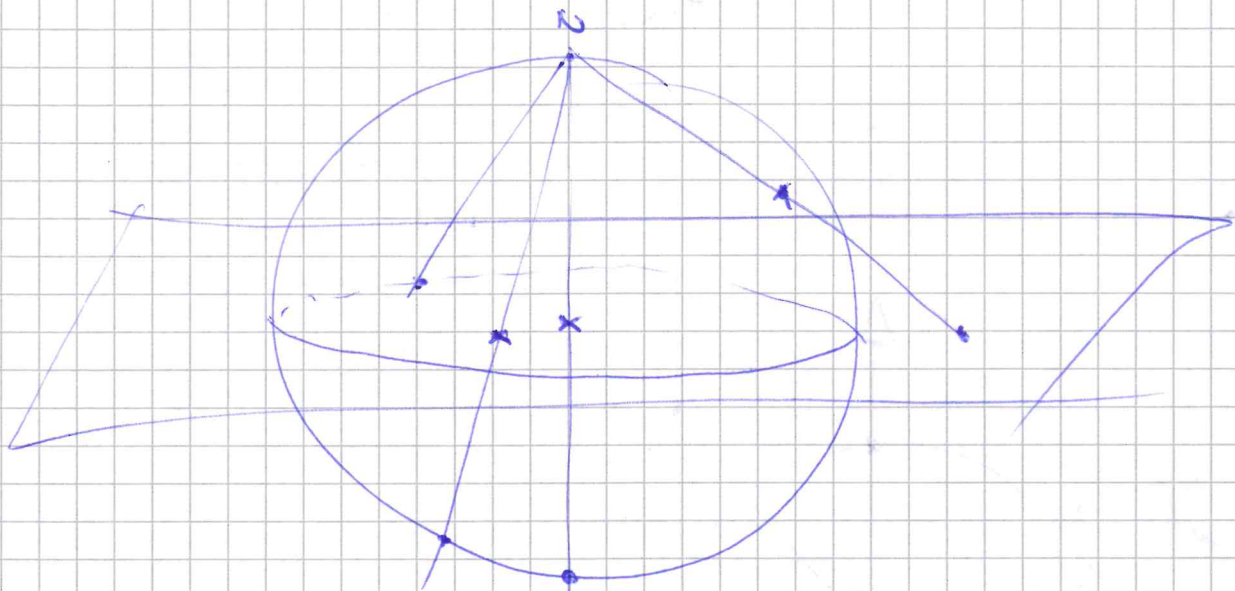
$$P'_R = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \{[1:m] / m \in \mathbb{R}\} \cup \{[0:1]\}$$



È su $\mathbb{C}$?? Problems geometrici: $\mathbb{C}$ è "un piano" (70)

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \{[1, m] / m \in \mathbb{C}\} \cup \{[0, 1]\}$$

Proiezione stereografica: si può identificare $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ come una sfera, detta sfera di Riemann:



Attenzione: $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$

$$\cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\cong S^2 \cup \{\infty\}$$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\ell_{\infty}}_{\text{"S"}}$$

In queste descrizioni geometriche, lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ è composto da uno spazio affine A^n più un'iperpiano di punti all'infinito $\mathbb{P}^{n-1}$, vediamo come formalizzare tutto questo

§2.5 Affinizzazione / Proiettificazione - Omogeneizzazione.

Abbiamo visto come fissare un riferimento proiettivo:

- fissando $n+2$ punti (ordinati) in pos. generale
- fissando una base, o meno di fattore di proporzione.

Notiamo con $RP(P_0, \dots, P_n, U)$ il rif. proiettivo

con punti fond. $P_0, \dots, P_n$ e vettore U ;

e con $RP(E)$ il rif. proiettivo dato dalla base E ,

e diciamo che $RP(E) = RP(P_0, \dots, P_n, U)$ se

$$P_0 = [e_0], \dots, P_n = [e_n], U = [e_0 + \dots + e_n].$$

Abbiamo visto come la scelta d'un RP permette di definire le coordinate, cioè una biiezione:

$$P(V) \xrightarrow{\sim} P^n_k$$

$$[E \times] \mapsto [x_0 : \dots : x_n].$$

Fissato un $RP(E)$ per $P(V)$ chiamiamo, per $i=0, \dots, n$,

Def. "i-esimo iperpiano fondamentale $H_i \subseteq P(V)$ "

l'iperpiano di equazione $x_i = 0$, cioè

$$H_i = P(\langle e_0, e_1, \dots, e_{i-1}, \cancel{e_i}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle) = L(P_0, \dots, \cancel{P_i}, \dots, P_n)$$

e "i-esimo aperto fondamentale" $P(V) \setminus H_i =: U_i \subseteq P(V)$

In coordinate H_i è definito da $x_i = 0$,

mentre $U_i = \{p[x_0, \dots, x_n] \in P(V) / x_i \neq 0\} \subset P(V)$

Abbiamo le seguenti applicazioni:

$$j_0: A_k^n \longrightarrow U_0$$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto [1: y_1: \dots: y_n]$$

$$j_1: A_k^n \longrightarrow U_1$$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto [y_1: 1: y_2: \dots: y_n]$$

$$j_n: A_k^n \longrightarrow U_n$$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto [y_1: \dots: y_{n-1}: 1]$$

j_i è detta i -esima omogeneizzazione di A_k^n in P_k^n

sono biunivoche:

in effetti le inverse sono

$$v_0: U_0 \longrightarrow A_k^n$$

$$[x_0: \dots: x_n] \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

$$v_1: U_1 \longrightarrow A_k^n$$

$$[x_0: x_1: \dots: x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right)$$

$$v_n: U_n \longrightarrow A_k^n$$

$$[x_0: \dots: x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)$$

Le v_i son ben definite:

$$[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n] \text{ per } \lambda \in k^*$$

$$\frac{x_j}{x_i} = \frac{\lambda x_j}{\lambda x_i} \quad \checkmark$$

Chiaramente $v_i \circ j_i = 1_{A^n}$

e anche $j_i \circ v_i = 1_{U_i}$, infatti:

$$[1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \text{ ecc.}$$

Permettano di definire una struttura di spazio affine

sugli U_i :

$$U_i \times U_i \longrightarrow k^n$$
$$(P, Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ} = v_i(Q) - v_i(P)$$

Def. Chiamiamo i punti di H_i "punti impropri" o "punti all'infinito" di $A^n_k = U_i$, e H_i è "iperpiano improprio".

Oss. $H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \emptyset \quad (\nexists [0:0:\dots:0] \in \mathbb{P}^n)$

$H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \bigcap_{j \neq i} H_j = \{P_i\} = [0:\dots:0:1:0:\dots:0]$ ← i-th

Queste costruzioni preservano i sottospazi,
nel seguente senso:

se abbiamo $j_i: A_k^n \xrightarrow{\sim} U_i \subset P(V)$

e $T \subseteq A_k^n$ sottospazio affine, allora otteniamo

$$\bar{T} = \bar{T}^i := L(j_i(T)) \quad \text{"chiusura proiettiva di } T^{\text{ i-esimo }}}$$

è il più piccolo sottosp. proiettivo di $P(V)$ che contiene $j_i(T)$.

Chiamiamo $\bar{T}^i \cap H_i$ i "punti impropri di T "
(rispetto a j_i) sono un sottosp. proiettivo di $\bar{T}$.

Viceversa: Se $S \subseteq P(V)$ è un sottosp. proiett.

allora $\exists i: S \not\subseteq H_i$ (infatti $H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \emptyset$)

Allora $\varphi_i(S \setminus H_i) \subseteq A_k^n$ è un sottosp. affine

la cui ~~chiusura~~ i-esima chiusura proiettiva è S .

Dimostriamolo, scrivendo le coordinate dei vari

sottospazi. (• Se $T \subseteq A_k^n$ ha eq. $Ay + \underline{b} = 0$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\bar{T} = \bar{T}^0 \text{ ha eq. } \begin{pmatrix} \underline{b} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

• Se $S \subseteq P(V)$ con $S \not\subseteq H_0$ è def. da $Ax = 0$

$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ allora $T = \varphi_0(S \setminus H_0) \subseteq A_k^n$ è def. da

$$By + A_{(0)} = 0 \quad \text{con } B = (A_{(1)} \ A_{(2)} \ \dots \ A_{(n)}) \quad A_{(i)} \text{ colonne}$$

Prop: Sia $T \subseteq \mathbb{A}_k^n$ un sottospazio affine
rappresentato dal Sistema Lineare (in equazioni, n incognite)

$$A \cdot y + \underline{a} = 0, \text{ con } A \in \mathcal{M}_{m,n}(k), \underline{a} \in \mathcal{M}_{m,1}(k) \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Allora $\bar{T} = \bar{T}^{(0)} \subset \mathbb{P}_k^n$ è rappresentato (nel RP standard)
dal sistema Lineare Omogeneo (in eq. $n+1$ incognite):

$$(\underline{a} \ A) X = 0 \quad \text{con } X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\underline{a} \ A) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(k)$$

Inoltre T e $\bar{T}$ hanno la stessa dimensione.

Osservazione: il SLO è ottenuto dal SL $Ay + \underline{a} = 0$
sostituendo ogni incognita y_i con $\frac{x_i}{x_0}$ e moltiplicando
ogni equazione per x_0 .

Dim: Sia $S \subseteq \mathbb{P}_k^n$ il sottospazio proiettivo $P(W)$
dove $W \subset k^{n+1}$ è l'ins. di soluzioni del SLO

$$(\underline{a} \ A) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0. \quad \text{Mostriamo che } S = \bar{T}.$$

1) $\bar{T} \subseteq S$: $\bar{T} = L(j_0(T))$, basta mostrare
che $j_0(T) \subseteq S$: sia $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in T$,

$$\text{allora } (\underline{a} \ A) \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{a} + Ay = 0$$

$$\text{quindi } [1: y_1: \dots: y_n] = j_0(y) \in S //$$

ii) ($\bar{T} \geq S$): Sia $P = [x_0 : \dots : x_n] \in S$, (46)
 bisogna verificare che $P \in L(j_0(T))$.

Ⓐ Se $x_0 \neq 0$ $P = [x_0 : \dots : x_n] = [1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}]$

Chiamiamo $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/x_0 \\ \vdots \\ x_n/x_0 \end{pmatrix}$, allora per ipotesi

$$\frac{1}{x_0} (\underline{a} \cdot A) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\underline{a} \cdot A) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{cioè} \quad Ay + \underline{a} = 0$$

quindi $P = j_0(y) = [1 : y] \in j_0(T) \subseteq L(j_0(T)) = \bar{T}$

Ⓑ Se $x_0 = 0$, $P = [0 : x_1 : \dots : x_n]$ con $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq 0$

e poiché $P \in S$ che ha eq. omog. $(\underline{a} \cdot A)x = 0$

allora $(\underline{a} \cdot A) \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$, cioè $Ay = 0$

quindi $y \in W \setminus \{0\}$, dove $W \subseteq k^n$ è l'insi.

delle soluzioni di $Ay = 0$, cioè la giacitura di T .

Dobbiamo mostrare che $P \in L(j_0(T))$, per questo

mostriamo che P è contenuto in una retta

passante per 2 punti di $j_0(T)$.

Poiché $T \neq \emptyset$ (è un sottosp. affine), $\exists Q = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in T$

cioè $A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \underline{a} = 0$, ma poiché $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ è

l.c. $A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$ allora anche $Q' = Q + y = \begin{pmatrix} z_1 + y_1 \\ \vdots \\ z_n + y_n \end{pmatrix} \in T$

Quindi $j_0(Q) = [1:z_1:\dots:z_n]$ e $j_0(Q') = [1:z_1+y_1:\dots:z_n+y_n]$

sono in $j_0(T) \subseteq L(j_0(T))$

Ma allora $P = [0:y_1:\dots:y_n] \in L(Q, Q') \subseteq L(j_0(T))$

(infatti il vettore $(0, y_1, \dots, y_n)$ che rappresenta P è
combinazione lineare dei vettori $(1, z_1, \dots, z_n)$ e
 $(1, z_1+y_1, \dots, z_n+y_n)$ che rappresentano Q e Q')

Osservazione: nella dimostrazione sopra, il punto

$P = [0:x_1:\dots:x_n]$ con $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq 0$ e $Ay = 0$

è un "punto improprio" della retta affine per Q e Q'
in $j_0(T)$!!

↓
sottosp. affine

Osservazione: Se $T \subset \mathbb{A}_k^n$, $\bar{T} = L(j_0(T)) \subseteq \mathbb{P}_k^n$

T definito da $Ay + \underline{a} = 0$ e $\bar{T}$ da $(\underline{a} A)x = 0$

i punti impropri di T formano un sottospazio proiettivo
di $\mathbb{P}_k^n$, di equazioni $\begin{cases} x_0 = 0 \\ (\underline{a} A)x = 0 \end{cases}$, questo è $\bar{T} \cap H_0$

Dimensioni: $T \neq \emptyset$ Rouché-Capelli: $\text{rg}(A) = \text{rg}(\underline{a} A)$

e $\dim T = n - \text{rg}(A)$

$\dim \bar{T} = (n+1 - \text{rg}(\underline{a} A)) - 1 = n - \text{rg}(A) = \dim T$.

$$\overline{T} \cap H_0: \begin{cases} x_0 = 0 \\ (\underline{a} \ A)x = 0 \end{cases} \quad \text{punti impropri di } T. \quad (78)$$

$$\Rightarrow \overline{T} \cap H_0: \text{SLO con matrice } B: \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{a} & A \end{pmatrix} \in M_{n+1, n+1}(k)$$

$$\text{che ha rango } \text{rg}(B) = \text{rg}(A) + 1$$

$$\Rightarrow \dim(\overline{T} \cap H_0) = n - \text{rg}(B) = n - \text{rg}(A) - 1 = \dim T - 1$$

Inoltre: se $T \subset \mathbb{A}_k^n$, di equazioni $Ay + \underline{a} = 0$,
 ha giacitura $W \subset \mathbb{A}_k^n$, di equazioni $Ay = 0$,
 allora $\overline{T} \cap H_0 = \{ [0 : y_1 : \dots : y_n] / \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in W \setminus \{0\} \}$

quindi possiamo identificare i punti impropri
 di T con i vettori (a meno di multi. per uno scalare)
 dello giacitura W di T , cioè le direzioni
 delle rette (affini) di T .

Osservazione:

Abbiamo visto come passare da un sottosp. affine $T \subset \mathbb{A}_k^n$

alla sua chiusura proiettiva $\overline{T} = L(j_0(T)) \subset \mathbb{P}_k^n$,

possiamo fare la stessa operazione con altra iniezione

$$j_1: \mathbb{A}_k^n \rightarrow U_1 \subset \mathbb{P}_k^n \quad \text{e prendere } \overline{T}^{(1)} = L(j_1(T)) \subset \mathbb{P}_k^n$$

$$\text{le equazioni diventano } (A_{(1)} \ A_{(2)} \ \dots \ A_{(i-1)} \ \underline{a} \ A_{(i+1)} \ \dots \ A_{(n)}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Vediamo ora, il passaggio inverso: $\emptyset \neq$
partiamo da un sottospazio proiettivo $S \subseteq \mathbb{P}_k^n$
e costruiamo un sottosp. affine $T \subseteq \mathbb{A}_k^n$ t.c.

$S = L(j_i(T)) = \overline{T^{(i)}}$ per qualche i (quali i ?):
in effetti, poiché $S \neq \emptyset$ e $H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \emptyset$
allora $\exists i$ t.c. $S \not\subseteq H_i$, supponiamo $i=0$.

Prop. Sia $S \neq \emptyset$ un sottosp. proiettivo di $\mathbb{P}_k^n$, e
supponiamo $S \not\subseteq H_0$ iperpiano fondamentale.

Allora (i) $T := \sigma_0(S \setminus H_0) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ è un sottosp. affine.

T ha eq. cartesiane in $\mathbb{A}_k^n$ (con riferimento affine standard)

$$B\gamma + A_{(0)} = 0, \text{ con } A_{(i)} \text{ colonne di } A,$$

$$B = (A_{(1)} \dots A_{(n)}) \in M_{m \times n}(k) \quad A_{(i)} \in M_{m \times 1}(k), \quad \gamma = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in k^n$$

$$(ii) \quad \overline{T} = L(j_0(T)) = S.$$

Inoltre T e S hanno la stessa dimensione.

Dim: la (ii) e le dimensioni sono conseguenze
della Proposizione mastrota sopra (eq. 2) $A_{(0)} \neq A_{(1)} \cup \dots \cup A_{(n)} = 0$

per (i) abbiamo: $S \setminus H_0 = S \cap \overline{U}_0 =$ //

$$= \{[x_0 : \dots : x_n] \in S / x_0 \neq 0\} = \{[y_1 : \dots : y_n] / A \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0\}$$

(80)

Quindi $S \setminus H_0 = \{ [1; y] \in \mathbb{P}_k^n / A_{(0)} + By = 0 \}$

dove $B = (A_{(1)} \dots A_{(n)})$

poniamo $T = \mathcal{O}_0(S \setminus H_0)$ allora $T = \{ y \in \mathbb{A}_k^n / A_{(0)} + By = 0 \}$

siccome $S \not\subset H_0$ allora $S \setminus H_0 \neq \emptyset$ e $T \neq \emptyset$

cioè $A_{(0)} + By = 0$ ha soluzioni e

$T \subseteq \mathbb{A}_k^n$ è sottosp. affine.

Chiaramente $j_0(T) = S \setminus H_0$ e dalla costruzione

sopra $L(j_0(T)) = \overline{T}$ ha eq. $(A_0 \ B)x = 0$,

quindi $\overline{T} = S$. 

Osservazione: Nel caso $S \not\subset H_k$, si prende

$T := \mathcal{O}_k(S \setminus H_k)$ e $\overline{T}^{(k)} = S$

e le equazioni di $T \subseteq \mathbb{A}_k^n$ si ottengono ponendo $x_k = 1$

e hanno matrice $By + A_{(k)} = 0$,

dove $B = (A_{(0)} \ A_{(1)} \dots \cancel{A_{(k)}} \dots A_{(n)})$, $A_{(j)}$ colonne di A

e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$