

TUTORATO GEOMETRIA 2

INCONTRO 2

11/10/2021

TROLETTI

DANIELE 

Foglio 1 ES 4

$$(i) \Leftrightarrow (ii)$$

$$\beta(N, w) = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow N = 0$$

Sia A la matrice di β :

$${}^*_{\forall} A w = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow N = 0$$

quindi A è non degenera e sinistra

Se una matrice A di dimensione finita è non degenera e sinistra allora lo è anche a destra. Da questo segue la Ter.

$$(iii) \Leftrightarrow (iv)$$

β_1 e β_2 sono applicazioni trasporto.

(v) e (vi) sono una riscrittura delle proprietà di essere non degenera e sinistra (o destra rispettivamente).

$$(i) \Leftrightarrow (iii)$$

Se per assurdo β_1 non è iniettivo $\Leftrightarrow \exists N \neq 0$ t.c.
 $\beta_1(N)(w) = 0 \quad \forall w \in V \Leftrightarrow \beta(N, w) = 0 \quad \forall w \in V \quad \checkmark$

FOGLIO 2 ES 1

$$Q(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$$

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))$$

$$(ii) \quad E' = (e_1 + e_3, e_1, e_2)$$

Scriviamo la matrice di cambio di base

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E' = EC$$

$$B = {}^t C A C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(x', y', z') = y'^2 - 2y'z'$$

$$(iii) \quad \text{rk } \beta = \text{rk } A = \text{rk } B = 2$$

$$E' = \{e_1 + e_3, e_4, e_2\} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_1 = C$

$$E'' = \{e_2', e_3', e_1'\} = \{e_1, e_2, e_1 + e_3\}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = {}^t P_2 B_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E''' = \left\{ e_1'', e_2'' - \frac{-1}{1} e_1'', e_3'' - \frac{0}{1} e_1'' \right\}$$

$$= \{e_1'', e_1'' + e_2'', e_3''\} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3\}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = {}^t P_3 B_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg } \beta = (1, 1)$$

Espressione canonica di $Q(x, y, z) = x^2 - y^2$

Matrice da base canonica a base in cui β è in forma canonica:

$$P = P_1 P_2 P_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t P A P = (P_1 P_2 P_3) {}^t A P_1 P_2 P_3$$

$$\stackrel{!}{=} {}^t P_1 {}^t P_2 {}^t P_3 \underbrace{{}^t A P_1}_{B_1} P_2 P_3$$

$$\stackrel{!}{=} {}^t P_3 \underbrace{{}^t P_2 B_1 P_2}_{B_2} P_3$$

$$\stackrel{!}{=} {}^t P_3 B_2 P_3 = B_3$$

$$F = \{ e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3 \}$$

Foglio 2 ES 5

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(i). \mathbb{E}' = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = {}^1P_1 A P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}'' = \{e_1', e_2', e_3' - \frac{1}{2}e_2', e_4' + \frac{1}{2}e_2'\}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = {}^2P_1 A_1 P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}''' = \{e_1'', e_2'', e_3'', e_4'' + e_3''\}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = {}^3P_3 A_2 P_3 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 2 & & \\ & & -\frac{1}{2} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$P = P_1 P_2 P_3$ e con questo trovo la base richiesta.

(ii) $\text{rk } P = 3$ $\text{gr } P = (1, 2)$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}^{\text{iv}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} e_2''', e_1''', \sqrt{2} e_3''', e_4''' \right\}$$

(iv) $I_P(\mathbb{R}^4)$

$$(x \ y \ z \ t) A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$-x^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}z^2 = 0$$

F06L10 2 ES 7

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xy - xz \quad \mathbb{F}_3[x, y, z]$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad -1 &= 2 & \frac{1}{2} &= 2 & \text{in } \mathbb{F}_3 \\ 1 &= -2 & -\frac{1}{2} &= -2 = 1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = 2 \\ \Rightarrow \operatorname{rk} A = 3$$

(iii)

$$\mathcal{B}' = \{e_1, e_2 - 2e_1, e_3 - e_1\}$$

$$= \{e_1, e_1 + e_2, 2e_1 + e_3\}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = {}^t P_1 A P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot E' = \{e_1', e_3', e_2'\}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = {}^t P_2 A_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot E'' = \{e_1'', e_2'', e_3'' - \frac{1}{2} e_2''\}$$

$$= \{e_1'', e_2'', e_2'' + e_3''\}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = {}^t P_3 A_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P = P_1 P_2 P_3$ è la matrice di cambiamento di base verso la base in cui P è diagonale.

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$$