

Cerchiamo di trovare gli isomorfismi in generale. (37)

$$(V, \beta) \quad E = \text{base di } V \quad \beta(E_x, E_y) = {}^t x B y$$

$$(V', \beta') \quad E' = \text{base di } V' \quad \beta'(E'_x, E'_y) = {}^t x B' y$$

$$\varphi: V \rightarrow V' \text{ iso di sp. vett.} \Rightarrow \varphi(E) = E' P \quad P \in GL_n$$

$$\begin{aligned} \beta'(\varphi(E_x), \varphi(E_y)) &= \beta'(E'_x P_x, E'_y P_y) = \\ &= ({}^t P_x) B' P_y = {}^t x {}^t P B' P y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ &= {}^t x B y \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow B = {}^t P B' P$$

P.es. Se β è un prod. scalare, E, E' basi ON.

$$\Rightarrow {}^t P P = I_n \quad P \in O_n(\mathbb{R})$$

Automorfismi: $\varphi: V \rightarrow V$, E base fissata

$$\varphi(E) = E P \quad \text{con } P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad B = {}^t P B P$$

[Ex] Fissata una matrice $B \in M_n(k)$

$$\text{l'insieme } \{ P \in GL_n(k) / {}^t P B P = B \} \subseteq GL_n(k)$$

è un sottogruppo.

Se B è di tipo particolare otteniamo

sottogruppi particolari, p.es. $O_n(\mathbb{R})$

Def: Sia k con $\text{car}(k) \neq 2$, $V = \text{sp. vet. di dim}_k V = 2$
 $h: V \times V \rightarrow k$ ^{simmetrica} non degenerata t.c. $\exists u_0 \neq 0 \in I_h(V)$
 si dice forma iperbolica. (V, h) si dice piano iperbolico

Esempio - Modello canonico: $V = k^2$ $h: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Prop: Ogni piano iperbolico è ISO al modello canonico qui sopra.

Dim: basta trovare una base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ di vettori isotropi tali che $h(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = 1$.

Per ipotesi $\exists \underline{u}_0 \neq 0$ t.c. $h(\underline{u}_0, \underline{u}_0) = 0$,

poniamo $\underline{u}_1 = \underline{u}_0$. Siccome h è non degenerata,

$\exists \underline{v}_0 \in V$ t.c. $h(\underline{u}_0, \underline{v}_0) \neq 0$. Possiamo supporre $h(\underline{u}_0, \underline{v}_0) = 1$

Allora $\underline{v}_0$ e $\underline{u}_0$ sono linearmente indipendenti,

altrimenti $\underline{v}_0 = \lambda \underline{u}_0$, $\lambda \in k$, quindi $h(\underline{u}_0, \underline{v}_0) = 0$.

Poniamo $\underline{u}_2 = \left(\underline{v}_0 - \frac{h(\underline{v}_0, \underline{v}_0)}{2} \underline{u}_0 \right)$, $\underline{u}_1 = \underline{u}_0$

$h(\underline{u}_1, \underline{u}_1) = 0$ $h(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = h(\underline{u}_0, \underline{v}_0) - h(\underline{u}_0, \underline{u}_0) = 1$

$h\left(\underline{u}_2, \underline{u}_2\right) = h\left(\underline{v}_0 - \frac{h(\underline{v}_0, \underline{v}_0)}{2} \underline{u}_0, \underline{v}_0 - \frac{h(\underline{v}_0, \underline{v}_0)}{2} \underline{u}_0\right) =$

$= h(\underline{v}_0, \underline{v}_0) + \underbrace{h(\underline{u}_0, \underline{u}_0)}_{=0} + 2 \frac{h(\underline{v}_0, \underline{v}_0)}{2} (-h(\underline{u}_0, \underline{v}_0))$
 $= 0 \quad // \quad \square$

Def: $V = \text{sp. vet. / } k \quad \text{car}(k) \neq 2$.

(39)

Una forma bil. non-degenera, simmetrica
si dice iperbolica se esiste $U \subseteq V$ sottosp. vet.
t.c. $U = U^\perp$. (V, h) si dice spazio iperbolico.

Prop: Se (V, h) è uno spazio iperbolico,
allora $\dim V = 2 \dim U = 2m$ è pari. Inoltre
esiste una base $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_m, v_m\}$ t.c.
 $h(u_i, u_i) = h(v_i, v_i) = 0 \quad i=1, \dots, m$
 $h(u_i, v_i) = 1 = h(v_i, u_i) \quad i=1, \dots, m$
 $h(u_i, v_j) = 0 \quad i \neq j$.

Dim: EX

In particolare (V, h) è una somma
diretta di piani iperbolici. Cioè

$$\bar{V} = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \dots \oplus \bar{V}_m \quad \text{con } \dim_k \bar{V}_i = 2$$

$$\text{e } h = h_1 \oplus \dots \oplus h_m \quad \text{con } h_i \text{ forma iperbolica su } \bar{V}_i$$

(Definire $(h_1 \oplus h_2)(u_1 \oplus u_2, v_1 \oplus v_2) = h_1(u_1, v_1) + h_2(u_2, v_2)$
somma diretta di forme bilineari)

Analogamente agli spazi iperbolici,
possiamo considerare spazi uniti di forme
alternanti: $\text{car}(k) \neq 2$

Def: (V, ω) $V = \text{sp. vett.}/k$ e $\omega: V \times V \rightarrow k$ alternante
non degenerare, è detto spazio simplettico.

Prop: (V, ω) sp. simplettico, allora $\dim V = 2m$
è pari, inoltre $\exists$ sempre una base

$$\{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_m, v_m\} \text{ t.c.}$$

$$\omega(u_i, v_i) = 1 = -\omega(v_i, u_i) \quad i=1, \dots, m$$

$$\omega(u_i, v_j) = \omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0 \quad i \neq j.$$

Dim: ω non degenerare: dato u ,
troviamo v t.c. $\omega(u, v) = 1$

$$\omega|_{\langle u, v \rangle} \text{ è non degenerare } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{possiamo decomporre } V = \langle u, v \rangle \oplus \langle u, v \rangle^\perp$$

$\Rightarrow$ dimostriamo per induzione. 

In particolare la matrice risp. $\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m\}$
è $\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} = J_{2m} \rightarrow$ "forma canonica di
uno sp. simplettico"

Come prima ci possiamo chiedere
che sono gli automorfismi che
preservano la forma symplectica,
otteniamo il gruppo simplettico.

$$Sp_{2n}(k) = \{ P \in GL_{2n}(k) / {}^t P J_{2n} P = J_{2n} \}.$$

Esempio : k^2 , $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$

$V = \text{sp. vet.} / k$, $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$

$W = V \oplus V^*$ $\omega: (V \oplus V^*) \times (V \oplus V^*) \rightarrow k$
 $((v, \varphi), (w, \psi)) \mapsto \varphi(w) - \psi(v)$

ω alternante

Ex Verificare che ω è non-degenera.

Se scegliamo una base $E = (e_1, \dots, e_n)$ di V

e la base duale $E^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ di V^*

la base $F = (e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ di $W = V \oplus V^*$

allora ω ha matrice J_{2n} in base F .

Se $\beta: V \times V^* \rightarrow k$
 $(v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$

allora

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta \\ \hline -\beta & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} V \\ V^* \end{array}$$

§ 1.6 Aggiunzione

(42)

Sia $\beta: V \times V \rightarrow k$ una forma bilin. simmetrica
non-degenera. Abbiamo visto che

$$\beta \leftrightarrow B: V \xrightarrow{\sim} V^* \text{ ISO}$$

supponiamo di avere 2 sp. vettoriali con forme bil.

(V, β) , (W, γ) , β, γ bilin. simm. non-deg.

Poiché β è non degenera, un vettore $v \in V$
è determinato da $\beta(v, -)$
cioè da $B(v) \in V^*$,

cioè: se conosciamo $\beta(v, v') \forall v' \in V$
allora identifichiamo v in maniera unica.

Se abbiamo $\varphi: V \rightarrow W$ app. lineare

definiamo l'applicazione lineare aggiunta

$$T(\varphi): W \rightarrow V$$
$$w \mapsto T(\varphi)(w)$$

tramite $\beta(T(\varphi)(w), v') = \gamma(w, \varphi(v')) \forall w \in W, v' \in V$

(Ex) Verificare che

(45)

i) fissato $w \in W$, l'app. $V \rightarrow k$
 $v' \mapsto \delta(w, \varphi(v'))$

è lineare (e quindi definisce un elemento in V^* ,
e un elemento in V , $T(\varphi)(w) \in V$ t.c. $\delta(w, \varphi(v')) =$
 $\beta(T(\varphi)(w), v')$)

ii) Verificare che l'app. $W \rightarrow V$ è lineare
 $w \mapsto (T\varphi)(w)$

iii) Considerare gli iso. $B: V \rightarrow V^*$, $D: W \rightarrow W^*$
e l'app. trasposta $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$.

Mostrare che

$$\begin{array}{ccc} W^* & \xrightarrow{\varphi^*} & V^* \\ \uparrow \beta & & \uparrow B \\ W & \xrightarrow{T\varphi} & V \end{array}$$

$$\varphi^* \circ D = B \circ (T\varphi).$$

(cioè l'aggiunta è la trasposta, tramite
gli isomorfismi B e D : $(T\varphi) = B^{-1} \circ \varphi^* \circ D$).

iv) Fissare base E di V , F di W , matrice A di φ ,
 B di β , D di δ , verificare che $(T\varphi) = B^{-1} A D$

Def: Un endomorfismo $\varphi: V \rightarrow V$ si dice autoaggiunto (o simmetrico) se $\varphi = T\varphi$,
cioè se $\beta(\varphi(v), v') = \beta(v, \varphi(v'))$.

- Fissando base E di V . $A =$ matrice di φ $\varphi(E) = EA$
 $B =$ matrice di β $\beta(E_x, E_y) = {}^t x B y$

Allora φ è autoaggiunto $\Leftrightarrow$

$$\beta(\varphi(E_x), E_y) = \beta(EA_x, E_y) = {}^t x {}^t A B y$$

$$\beta(E_x, \varphi(E_y)) = {}^t x B A y$$

$$\Leftrightarrow {}^t A \cdot B = B A \Leftrightarrow B^{-1} {}^t A B = A.$$

- In part. se $B = I_n$ (pres. prod. scalare + base ON)
 φ autoaggiunto $\Leftrightarrow A$ è matrice simmetrica

Ex Sia $V = \text{sp. vet.} / \mathbb{R}$ ~~di~~ $\dim_{\mathbb{R}} V = n$

Sia $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simm. nondeg. signature $(p, n-p)$

Determinare le condizioni su $A = (a_{ij})$

matrice di $\varphi: V \rightarrow V$ rispetto base E t.c.

β sia in forma canonica, perché

φ sia autoaggiunto.

§ 1.7 Prod. scalari e Hermitiani.

(45)

$V = \text{sp. vett.} / \mathbb{R}$

$\langle, \rangle$ prod. scalare = bilineare simm. def. positivo.

Abbiamo visto che esiste

$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismo t.c. $\langle v, w \rangle = \varphi(v) \cdot \varphi(w)$

Questo permette di trasferire su V tutte le proprietà del prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$:

• norma: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

i) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Schwartz: $\langle v, w \rangle \leq \|v\| \cdot \|w\| \Rightarrow$ angolo
(con "=" $\Leftrightarrow v \parallel w$)

G-S: $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\leadsto \{u_1, \dots, u_n\}$ base ON di V con

$$\langle u_i, u_k \rangle = \langle v_i, v_k \rangle$$

$$\mathcal{I}_{\langle, \rangle}(V) = \{0\} \Rightarrow \forall U \subseteq V \text{ sottosp.}$$

$$V = U \oplus U^\perp$$

Def. $(V, \beta) =$ sp. vetl. con β bil. simm. non deg.

$(W, \delta) =$ _____

$\varphi: V \rightarrow W$ preserva la f. bilineare

$$\Leftrightarrow \delta(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = \beta(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$\Leftrightarrow {}^t A D A = B$$

Def. Se $V=W$ e $\delta=\beta=\langle, \rangle$ prod. scalare ($/\mathbb{R}$)
un endomorfismo si dice "unitario" (operatore un.)
se preserva il prod. scalare.

Oss. in una base ortonormale ${}^t A \cdot A = I_n$

Prop. $(V, \langle, \rangle)$ sp. vetl. euclideo. $\varphi: V \rightarrow V$ endo. (lineare)

Equiv. (i) φ è unitario

$$(ii) \|T(v)\| = \|v\|$$

(iii) $\forall$ base ON $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ è base ON

(iv) $\exists$ base ON $\{e_1, \dots, e_n\}$ t.c. _____

Dim. tutto ovvio, tranne (ii) $\Rightarrow$ (i) :

$$\begin{aligned} \|T(v+w)\|^2 &= \|T(v)\|^2 + \|T(w)\|^2 + 2\langle T(v), T(w) \rangle = \\ &= \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle \quad \checkmark \end{aligned}$$

Isometrie := affinità + appl. lineare unitaria.

$(E, V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(E', V', \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spazi euclidei

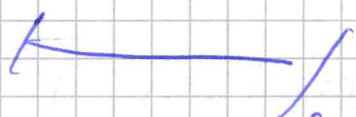
$F: E \rightarrow E'$ isometria se

i) F applicazione affine $F(p+v) = F(p) + \varphi(v)$

ii) $\varphi: V \rightarrow V'$ preserva i prodotti scalari

In particolare φ iniettiva, quindi F iniettiva.

Se $F: E \rightarrow E$ isometria $\leadsto$ gruppo delle isometrie
(p.es. per $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \leadsto$ classificazione)



Consideriamo il caso complesso: $V = \text{sp. vet.} / \mathbb{C}$

Def: $\sigma: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ si dice "sesquilineare" (forms)

i) $\sigma(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda \sigma(v_1, w) + \mu \sigma(v_2, w)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
 $v_1, v_2, w \in V$

ii) $\sigma(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \overline{\lambda} \sigma(v, w_1) + \overline{\mu} \sigma(v, w_2)$

(ADx vs. ASx)

"hermitiana" se vale anche (iii) $\sigma(v, w) = \overline{\sigma(w, v)}$

base $E = (e_1, \dots, e_n) \in V$ $A = (a_{ij}) = (\sigma(e_i, e_j))$

$$\Rightarrow \sigma(Ex, Ey) = {}^t \overline{x} A y$$

$$\text{dove } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \overline{y} = \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \vdots \\ \overline{y}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Quindi h è un f. hermitiano $\Leftrightarrow A = {}^t\bar{A} = A^* \quad (48)$

cioè $A = (a_{ij})$ ~~def~~ $a_{ji} = \overline{a_{ij}} \in \mathbb{C}$
"matrice hermitiana"

Osservazione: per (iii) $h(v, v) = \overline{h(v, v)} \in \mathbb{R}$

f. hermitiano def. positivo $\Leftrightarrow h(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V$
 $= 0 \Leftrightarrow v = 0$

semi def. positivo, def. negativo, ...

Def: Un "prodotto hermitiano" è f. hermitiano def. positivo.
 (V, h) con h prod. hermitiano è "sp. vettoriale hermitiano"

Teor (Sylvester): $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ f. hermitiano,

$\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2$ t.c. ogni base ortogonale

ha p vettori in f. positivo e q in forma negativo.

$\Rightarrow$ possiamo trovare base dove $h = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Operatori "unitari"

• (Isometrie) $\varphi: V \rightarrow V$ t.c. $h(\varphi(v), \varphi(w)) = h(v, w)$

• In part. se h prod. hermitiano, E base on.,

$\varphi(E) = EA$ isometria $\Leftrightarrow {}^tA \cdot \bar{A} = I_n$

$\Leftrightarrow {}^t\bar{A} \cdot A = I_n \Leftrightarrow A^{-1} = {}^t\bar{A} = A^*$

$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) / {}^t\bar{A} \cdot A = I_n\}$

Come su $\mathbb{R}$ abbiamo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$,

abbiamo proiezioni ortogonali, basi ortonormali, ...

• Operatore aggiunto:

Sia $\varphi: V \rightarrow W$ $\mathbb{C}$ -lineare, con $V, W = \text{sp. hermit.}$

definiamo $T\varphi: W \rightarrow V$ tramite

$$\langle T\varphi(w), v \rangle = \langle w, \varphi(v) \rangle \quad \left| \begin{array}{l} v \in V \\ w \in W \end{array} \right.$$

Ex i) Verificare che $T\varphi: W \rightarrow V$ è $\mathbb{C}$ -lineare

ii) Fissato $w_0 \in W$, l'applicazione

$V \rightarrow \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$ -lineare??

$$v \mapsto \langle w_0, \varphi(v) \rangle$$

iii) L'applicazione $\text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W, V) \varphi \mapsto T\varphi$ è $\mathbb{C}$ -lin.??

Che matrice ha l'operatore aggiunto?

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^m$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{(w_1 \dots w_m)} A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$$= {}^t \overline{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}} A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = {}^t \overline{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\varphi \text{ ha matrice } A^* = {}^t \overline{A} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$$

Def: Un operatore $\varphi: V \rightarrow V$ ($\mathbb{C}$ -lineare)

si dice hermitiano se $T\varphi = \varphi$,

cioè se $h(\varphi(v), w) = h(v, \varphi(w))$.

Osservazione: Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno sp. vett. hermitiano

con base ON, E . Sia $\varphi: V \rightarrow V$ un $\mathbb{C}$ -lineare

Allora φ è hermitiano $\Leftrightarrow \varphi(E) = EA$ con $A = A^*$

Teor (Spettrale):

i) Sia V uno sp. vett. $/\mathbb{R}$, $\varphi: V \rightarrow V$ operatore
simmetrico
($V =$ sp. vett. euclideo)

$\Rightarrow V$ è diagonalizzabile, e gli autoval. sono $\mathbb{R}$
cioè $\exists$ base ON di autovettori.

ii) $V =$ sp. vett. hermitiano, $\varphi: V \rightarrow V$ operatore
hermitiano $\Rightarrow \exists$ base ON di autovettori.
con autovalori reali

Altre versioni:

i) $V =$ sp. vett. euclideo $\varphi: V \rightarrow V$ lineare

φ è autoaggiunto $\Leftrightarrow \exists$ base ON di autovettori.

• V sp. vet. (euclideo o hermitiano), $\langle, \rangle$.

$\beta: V \times V \rightarrow K$ ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

forma bilin. (simmetrica o hermitiana).

$\Rightarrow \exists$ base ON tale che β è diagonale.

Versione + Generale:

~~Teor (Spettrale)~~ Def: i) $V = \text{sp. vet. (eucl. o hermit.)}$

$\varphi: V \rightarrow V$ appl. lineare, è detta normale

se φ commuta con T_φ , cioè $\varphi \circ T_\varphi = T_\varphi \circ \varphi$.

ii) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è normale se ${}^t A \cdot A = A \cdot {}^t A$

iii) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ è normale se ${}^t \bar{A} \cdot A = A \cdot {}^t \bar{A}$

Esempi: i) $A \in O(n)$ è normale: ${}^t \bar{A} \cdot A = I_n = A \cdot {}^t \bar{A}$

ii) φ autoaggiunto è normale

Teor (Spettrale / $\mathbb{C}$): $V = \text{sp. vet. hermitiano}$

$\varphi: V \rightarrow V$ è normale $\Leftrightarrow \exists$ base ON di autovettori.

Oss: i) φ unitario, tutti gli autovalori λ hanno $|\lambda| = 1$

ii) φ hermitiano $\Rightarrow$ tutti gli autovalori $\in \mathbb{R}$.

iii) $\exists$ matrici normali né unitarie né hermitiane
né anti-hermitiane ($\boxed{I \in X}$) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dim: Se φ commuta con T_φ allora la matrice di φ in una qualsiasi base ON è Normale.

⇒ Se $\exists$ base ON di autov.

allora φ ha matrice $D = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

${}^t D = D(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$ e chiaramente $D {}^t D = {}^t D D$

($\Rightarrow$) Induzione su $n = \dim_{\mathbb{C}} V$

$n=1$ OK $\checkmark$ Supponiamo vero per $n-1$:

Sia $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ e sia λ un autovalore di φ .

Sia $v \neq 0$ con autovalore λ , e sia $L = \langle v \rangle$

Sia $W = L^\perp$, allora $\varphi(W) \subseteq W$, infatti $\varphi(W) \perp v$:

$$\langle v, \varphi(w) \rangle = \langle T_\varphi(v), w \rangle = \langle \bar{\lambda} v, w \rangle = 0$$

(Se $\varphi(v) = \lambda v$, allora $T_\varphi(v) = \bar{\lambda} v$).

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(T_\varphi) : \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \langle v, (T_\varphi \circ \varphi)(v) \rangle =$$

$$= \langle T_\varphi(v), T_\varphi(v) \rangle = 0 \quad (\text{poiché anche } \varphi - \lambda \bar{\lambda} \text{Id}_V \text{ è normale})$$

$$\begin{aligned} V_\lambda(\varphi) &= \text{Ker}(\varphi - \lambda \bar{\lambda} \text{Id}_V) = \text{Ker}(T(\varphi - \lambda \bar{\lambda} \text{Id}_V)) = \text{Ker}(T(\varphi) - \bar{\lambda} \text{Id}_V) \\ &= V_{\bar{\lambda}}(T_\varphi) \end{aligned}$$

Induzione su $\varphi|_W \Rightarrow$ base $e_2, \dots, e_n$ per W , ON.

$\Rightarrow e_1 = \frac{v}{\|v\|}, e_2, \dots, e_n$ base ON di autovettori. $\square$

Osservazione : Se $\varphi: V \rightarrow V$ endom. ($\mathbb{C}$ -lin.)

V sp. vett. hermitiano, E base ON di V .

$\varphi(E) = EA$ φ è normale $\Leftrightarrow A \in M_n(\mathbb{C})$ è normale

$\Leftrightarrow \exists F$ base ON di autovet. ($F = EP$ $P \in U(n)$)

$\Leftrightarrow \exists P \in U(n) / P^{-1}AP = D$ diagonale

$\Leftrightarrow \exists P \in U(n) / {}^t P A P = D$ diagonale

Quindi A normale $\Rightarrow A$ simile ad una matrice diag.
 $\Rightarrow A$ congruente ad una matrice diag.

Caso reale : Asimmetrica $\Rightarrow A$ simile ad una diag.
o $\Rightarrow A$ congruente ad una diag.

Mettiamo tutto insieme Sia $V = \text{sp. vett.} / \mathbb{C}$

(53)

Sia $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ una f. hermitiana.

possiamo scrivere $\forall (v, w) \in V \times V$:

$$h(v, w) = \operatorname{Re}(h(v, w)) + i \operatorname{Im}(h(v, w))$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} s: V \times V \rightarrow \mathbb{R} & e \quad a: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto \operatorname{Re}(h(v, w)) & (v, w) \mapsto \operatorname{Im}(h(v, w)) \end{array}$$

Sono addittive rispetto a v e w .

Inoltre, se $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} s(cv, w) + i a(cv, w) &= h(cv, w) = \\ &= c h(v, w) = c s(v, w) + i c a(v, w) \end{aligned}$$

stessa cosa per $h(v, cw)$

$\Rightarrow$ s e a sono 2 f. bil. $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

che verificano $s(v, w) = s(w, v)$

$$e \quad a(v, w) = -a(w, v)$$

$\Rightarrow$ s = simmetrica e a = alternante.

$$\text{Anche } h(iv, w) = -i h(v, w) = -i(s(v, w) + i a(v, w))$$

$$e \quad h(v, iw) = i h(v, w) = i(s(v, w) + i a(v, w))$$

$$\Rightarrow s(iv, w) + a(v, w) = -s(v, iw)$$

$$s(v, w) = a(v, iw) = -a(iv, w)$$

$$h(iv, iw) = h(v, w)$$

(54)

$$\Rightarrow s(iv, iw) = s(v, w)$$

(*)

$$a(iv, iw) = a(v, w)$$

(**)

Quindi da $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ hermitiana

otteniamo $s: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sim. che verifica (*)

e $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ alt. che verifica (**)

$$\text{Tab. che } a(v, w) = s(iv, iw) = -s(v, iw)$$

$$e \quad s(v, w) = a(v, iw) = -a(iv, w)$$

Viceversa:

VICEVERSA i) partiamo da $s: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{simmetrica t.c. } s(iv, iw) = s(v, w) \quad (*)$$

$$\text{Otteniamo } h(v, w) := s(v, w) + i s(iv, w)$$

[Ex] Verificare che $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ così def.
è b. def. ed è una f. hermitiana.

ii) partiamo da $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ alternante

$$\text{che verifica } (**) \quad a(iv, iw) = a(v, w)$$

$$\leadsto h(v, w) = a(v, iw) + i a(v, w)$$

[Ex] i) h è f. hermitiana.

$$\text{ii) Biezioni } \text{Herm}(V) \xrightarrow{\sim} S = \{ p: V \times V \rightarrow \mathbb{R} / \text{sim.} \} \subset \text{Bil}_{\mathbb{R}}(V \times V)$$

$$\text{Herm}(V) \xrightarrow{\sim} A = \{ p: V \times V \rightarrow \mathbb{R} / \text{alt.} \} \subset \text{Bil}_{\mathbb{R}}(V \times V)$$

Sono ISO di che sp. vetl.??

EX

Sia $V = \mathbb{C}^n$ b. canonica $E = (e_i)$ $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 55 i-esimo posto

$h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ una f. hermitiana, con matrice $H = (h_{ij})$

$$h_{ji} = \overline{h_{ij}}$$

i) determinare una base di $V/\mathbb{R}$

qual è la dimensione di V su $\mathbb{R}$?

ii) Considerare la base reale $F = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$

dove $(0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{j-esimo posto}}}{1} 0 \dots 0) = a_j \in \mathbb{C}^n$

e $(0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{j-esimo posto}}}{i} 0 \dots 0) = b_j \in \mathbb{C}^n$

Se $H = (h_{jk})$ con $j, k = 1, \dots, n$ $h_{jk} = \overline{h_{kj}} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk}$

Determinare una matrice di $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

in funzione di α_{jk} e β_{jk} .

$$\begin{pmatrix} \beta_{ij} & \alpha_{ij} \\ -\alpha_{ij} & \beta_{ij} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} j \\ \vdots \\ i \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} \beta_{ij} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ij} & \beta_{ij} \end{pmatrix}$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in \mathbb{R}$$

$$\beta_{ij} = -\beta_{ji} \in \mathbb{R}$$

in part $\beta_{ii} = 0$

iii) Verificare che se h è non degenera (p.es. def. pos.) allora ω è una f. symplettica su V (sp. vet. reale)

iv) Se H è il prodotto hermitiano standard,
qual è una base simplettica per $V/\mathbb{R}$?

v) Come trovare una base simplettica
per la forma simplettica $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ in generale?
(Se h è non degenera)

vi) Se $h: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ $h = (h_{jk})$ matrice hermitiana
 $h_{jk} = \overline{h_{kj}}$

Se $z = (t_1, \dots, t_n), z' = (t'_1, \dots, t'_n) \in \mathbb{C}^n$

Determinare $h(z, z')$ e $\omega(z, z')$
e verificare che $\omega(z, z') = \overline{\omega(z, z')} \in \mathbb{R}$

vi) $h(z, z') = \sum_{j,k} h_{jk} \bar{t}_j t'_k$

Se $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ $\bar{\alpha} = a - ib$ $-\frac{i}{2}(\alpha - \bar{\alpha}) = \Im(\alpha)$

$\omega(z, z') = \Im(h(z, z')) = -\frac{i}{2} (h(z, z') - \overline{h(z, z')}) =$
 $= -\frac{i}{2} \left(\sum_{j,k} h_{jk} \bar{t}_j t'_k - \sum_{j,k} \overline{h_{jk} \bar{t}_j t'_k} \right) =$
 $= -\frac{i}{2} \left(\sum_{j,k} h_{jk} \bar{t}_j t'_k - \sum_{j,k} \overbrace{h_{kj} \bar{t}'_k t_j}^{\sum_{j,k} h_{jk} \bar{t}'_j t_k} \right) =$
 $= -\frac{i}{2} \left(\sum_{j,k} h_{jk} (\bar{t}_j t'_k - \bar{t}'_j t_k) \right)$

56
Come si verifica che è ~~definita~~ reale?

$$\begin{aligned}\overline{a(z, z')} &= \frac{i}{2} \left(\sum \overline{h_{jk}} (t_j \overline{t'_k} - t'_j \overline{t_k}) \right) = \\ &= -\frac{i}{2} \sum h_{kj} (\overline{t_k} t'_j - \overline{t'_k} t_j) = a(z, z')\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a(z, z') \in \mathbb{R} \quad //$$

Cosa ci facciamo ??