TUTORATO GEOMETRIA 2

INCONTRO 1

04/10/2021

TROLETTI

DANIELE

- PICCOLA PAUSA A METÀ

daniele.troletti@math.unipd.it

FOGLIO 1 ES 1

$$\psi : Hom_K(V, W) \longrightarrow Hom_K(W^*, V^*)$$
$$f \longmapsto {}^t f$$

(i) ${}^t(f+g) \stackrel{?}{=} {}^t f + {}^t g$ $\qquad \forall \varphi \in W^* \quad \forall v \in V$

$$\begin{aligned}\left({}^t(f+g)\,\varphi\right)(v) &= \varphi \circ (f+g)\ (v)\\ &= \varphi\left((f+g)(v)\right) = \varphi(f(v) + g(v))\\ &= \varphi \circ f\ (v) + \varphi \circ g\ (v)\\ &= {}^t f\ \varphi\ (v) \quad {}^t g\ \varphi\ (v)\\ &= ({}^t f + {}^t g)\ \varphi\ (v)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad {}^t(f+g) = {}^t f + {}^t g$$

Stesso metodo: $\quad {}^t(\lambda f) = \lambda\, {}^t f \quad \forall \lambda \in K$

Quindi ψ è lineare.

(ii) $\dim V = \dim V^*$ e $\dim W = \dim W^*$

quindi se $\operatorname{Ker} \psi = 0$ la mappa è un isomorfismo.

$f \in \operatorname{Ker} \psi \iff {}^t f = 0$

${}^t f\, \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in W^*$

${}^t f\, \varphi(v) = 0 \quad \forall \varphi \in W^* \quad \forall v \in V$

$\varphi f(v) = 0 \quad \forall \varphi \in W^*$ se considero gli elementi di una base allora $f(v) = 0$

$\Rightarrow f(v) = 0 \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow f = 0$

Quindi $\operatorname{Ker} \psi = 0$.

FOGLIO 1 ES 9

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$\mathbb{E}' = \{e_1 + e_2,\ e_2,\ e_3\}$$

si prosegue con G-S. #

FOGLIO 1 ES 2

β alternante $\overset{?}{\Longrightarrow}$ β antisimmetrico
$\Longleftarrow$

($\Rightarrow$)

$$0 = \beta(v+w, v+w) = \cancel{\beta(v,v)} + \beta(v,w) + \beta(w,v) + \cancel{\beta(w,w)}$$

$$\overset{!}{=} \beta(v,w) + \beta(w,v) \qquad \boxed{\text{SEMPRE}}$$

($\Leftarrow$)
$$\beta(v,v) = -\beta(v,v) \Rightarrow 2\beta(v,v) = 0$$

Serve $\text{char}\, k \neq 2 \Rightarrow \beta(v,v) = 0$.

FOGLIO 1 ES 3

$$\mathrm{Bil}_K(V\times W, K) \to \mathrm{Hom}_K(V, W^*)$$
$$\beta \longmapsto \beta_1$$
$$\mathrm{Bil}_K(V\times W, K) \to \mathrm{Hom}_K(W, V^*)$$
$$\beta \longmapsto \beta_2$$

(i) $\beta_1(v) = \beta(v, -) \in W^*$ $\qquad$ $\beta_2(w) = \beta(-, w) \in V^*$

- $\beta_1 = 0 \iff \beta_1(v) = 0_{W^*} \quad \forall v\in V \iff \beta_1(v)(w) = 0 \quad \forall v\in V \ \forall w\in W$

$\beta(v, -)(w) = 0 \quad \forall v\in V \ \forall w\in W$

$\beta(v, w) = 0 \quad \forall v\in V \ \forall w\in W$

$\Rightarrow \beta = 0$

Queste mappe sono iniettive

- Dato $\gamma \in \mathrm{Hom}_K(V, W^*)$

$\beta(v, w) = \gamma(v)(w) \quad \forall v\in V \ \forall w\in W$

Questa è una forma bilineare

$\beta_1(v)(w) = \beta(v,w) = f(v)(w) \qquad \forall v, \forall w$

$\Rightarrow \beta_1 = f \qquad$ OK.

Quindi sono isomorfismi canonici.

(iii) $\beta_1 : V \to W^* \qquad {}^t\beta_1 : W^{**} \longrightarrow V^*$

$W^{**} \cong W$

Notazione: $\underline{w} \in W^{**}$ ed è l'immagine sotto l'isomorfismo canonico di w.

$${}^t\beta_1 \, \underline{w} \, (v) = \underline{w} \, \beta_1(v) = \beta_1(v)(w) = \beta(v,w) \quad \forall v \in V$$

$$\beta_2(w)(v) = \beta(v,w)$$

$=$

Quindi β_1 e β_2 sono uno trasposto dell'altro

USANDO LE BASI

Se A è la matrice di β,

matrice di $\beta_1 = {}^tA$

matrice di $\beta_2 = A$

$\Rightarrow {}^t\beta_1 = \beta_2$.

(iv) $V = W$

- $\beta_1 = \beta_2 \iff \beta_1(v_1)(v_2) = \beta_2(v_1)(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

$$\iff \beta(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1) \iff \beta \text{ SIMMETRICA}$$

- $\beta_1 = -\beta_2 \iff \beta_1(v_1)(v_2) = -\beta_2(v_1)(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

$$\iff \beta(v_1, v_2) = -\beta(v_2, v_1) \iff \beta \text{ ANTISIM.}$$

FOGLIO 1 ES 6

$K = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad V = K^2$

(i) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ NON è alternante
è antisimmetrica

$D = -D$? $\quad -1 = 1$

(ii) $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} a = d = 0$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \forall x, y$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} by \\ cx \end{pmatrix} = 0 \quad (b+c)xy = 0 \quad \forall x, y$$

Se prendiamo $x = y = 1$ abbiamo $b + c = 0$

$\Rightarrow b = -c \Rightarrow b = c$

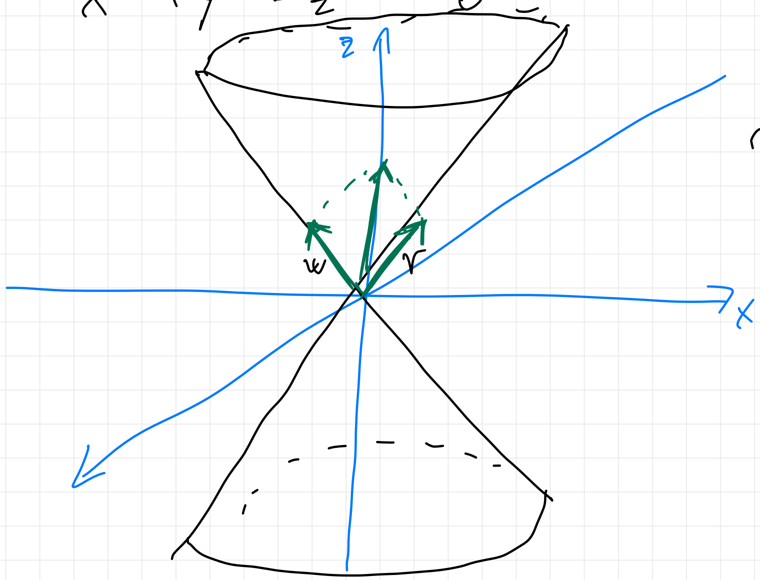
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ alt. $\Rightarrow$ antisimmetrica

FOGLIO 1 ES 7 $\qquad \mathbb{R}^3$

$$A : \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

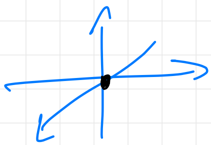
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$



$v + w \notin I_\beta(\mathbb{R}^3)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (x\ y\ z)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad I_\beta(V) = 0$$



$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $a, b < 0$ come B

a, b segni opposti come A

cono a sezione ellittica.

FOGLIO 1 ES 8

(1) $I_\beta(V) = 0 \Rightarrow (\beta(v,v) = 0 \Rightarrow v = 0)$

Se β fosse degenere allora $\exists\, v' \neq 0$ tale che

$\beta(v', w) = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow \beta(v', v') = 0$

$\Rightarrow v' = 0$ ↯

$\Rightarrow \beta$ è non degenere.

esempio: I in $\mathbb{R}^n$